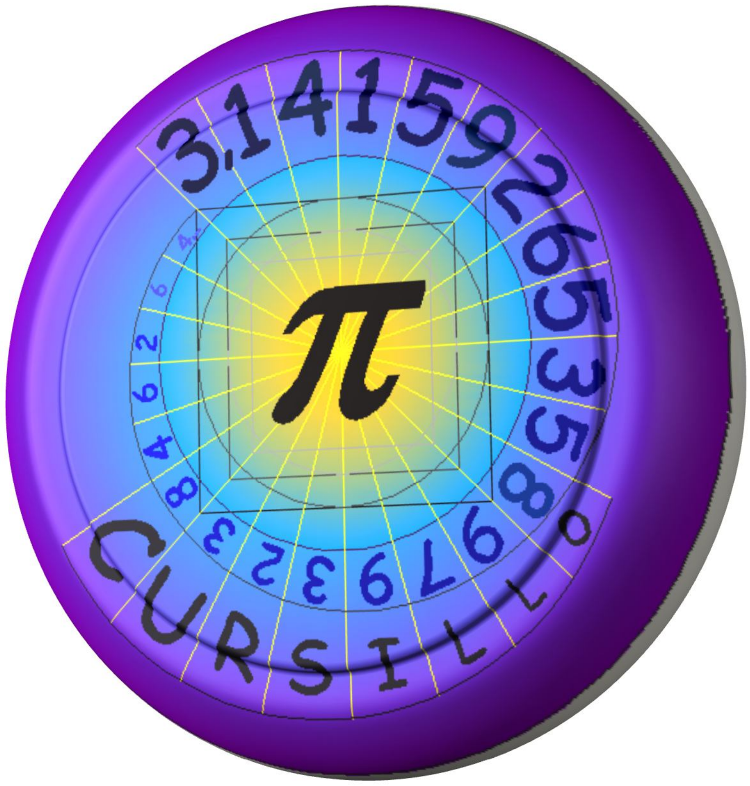
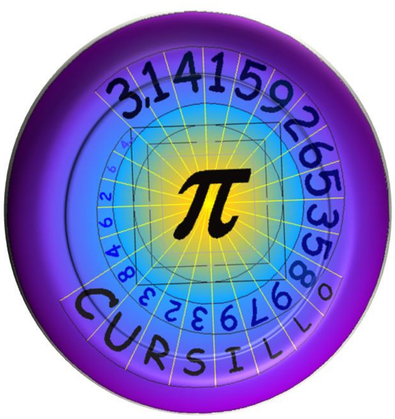
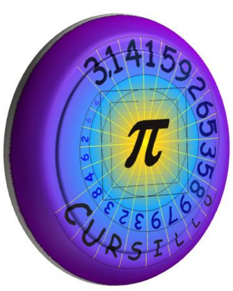




Geometría Plana



ING. RAÚL MARTÍNEZ

GEOMETRÍA PLANA

1) **Introducción:** La geometría es una parte de la matemática que fue montada a partir de ciertas definiciones básicas o fundamentales que funcionan como los cimientos de esta materia y en torno a estos conceptos fue ampliándose con otras definiciones.

En general se estudian cuerpos ideales o intuitivos, pero esto no quiere decir que no tenga aplicación en la práctica, pues caso contrario, ya no existirían.

Las aplicaciones básicas de la geometría son en Física, ayudando en interpretaciones de magnitudes vectoriales, en óptica geométrica, astronomía…etc.

En química, tiene mucha aplicación en la estructura molecular, y principalmente en cristalografía.

Se acostumbra decir que la geometría es para la matemática lo que la lógica es para la filosofía, de modo que esta materia le prepara al "ESTUDIANTE" a usar su ingenio para resolver los problemas de una forma racional.

2) **Conceptos fundamentales o primitivos:** son conceptos abstractos que debemos idealizar en la mente por intuición, asociando a objetos conocidos.

"PUNTO" podríamos asociar con el núcleo de un átomo.

Al respecto del punto podríamos decir que sirve para indicar un lugar en el espacio, que no tiene dimensión, ni volumen, y se dice que entre dos puntos existen infinitos puntos.

"LINEA" podríamos asociar con el hilo de una araña.

"SUPERFICIE" podríamos asociar con la parte palpable de un objeto.

"CUERPO GEOMETRICO" podríamos asociar con los objetos que nos rodean.

"ESPACIO" lugar infinitamente grande, donde caben todos los objetos reales e imaginarios.

3) **Generación de líneas, superficies y sólidos por movimiento:**

LINEA: Si desplazamos rápidamente un punto luminoso, percibimos una línea.
Se dice que al desplazar un punto se engendra una línea.
Entonces una línea está formada por un conjunto ordenado de puntos.

SUPERFICIE: Se dice que una línea al desplazarse, engendra una superficie. Una superficie está formada por un conjunto de líneas.

SÓLIDOS: Se dice que una superficie al desplazarse, engendra un sólido.
Un sólido puede considerarse como formado por un conjunto de superficies.

De esta forma podríamos decir que la línea ideal o geométrica, no tiene espesor, ni anchura y la superficie ideal o geométrica sin espesor.

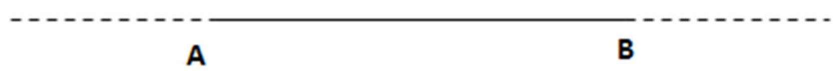
4) **LINEA RECTA:** Es un concepto abstracto y no tiene definición propia, pero podríamos considerarlo como el conjunto de puntos, que tienen una misma dirección y es ilimitada en sus dos sentidos.

La recta posee las siguientes características:

- Por dos puntos puede pasar una recta y solo una, o lo que es igual: una recta está determinada por dos cualesquiera de sus puntos.

- Si dos rectas tienen dos puntos comunes coincidirán o se confundirán una con la otra, formando una sola recta.

- Si dos rectas se cortan, se cortaran en un solo punto, llamado punto de intersección.



Semirrecta: Es una parte de una recta limitada en un extremo por uno de sus puntos e ilimitada en uno de los sentidos.

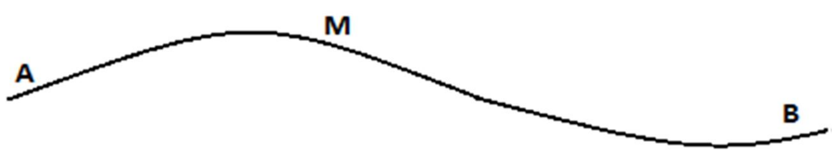
Semirrecta $\overrightarrow{AB}$

Un punto de la recta lo divide en dos semirrectas opuestas.

Segmento de recta: es una parte de una recta limitada por dos puntos de esta. El segmento se puede medir.

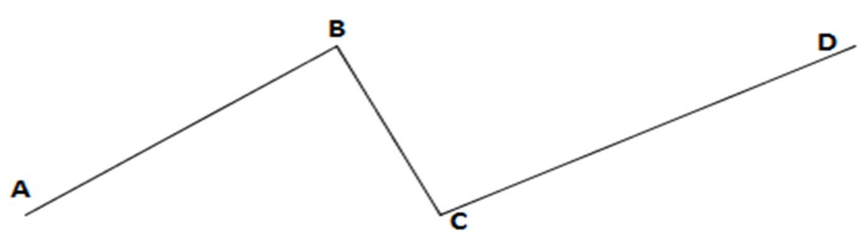
Segmento AB……………….. $\overline{AB}$

5) **LINEA CURVA:** es la línea que no tiene ningún segmento recto y se dice cerrada cuando sus extremos coinciden.

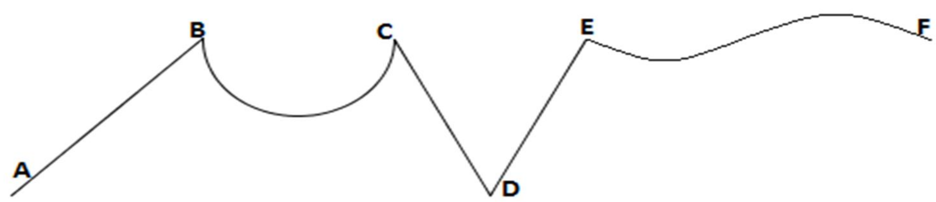


6) **LINEA QUEBRADA:** es la que se compone de dos o más segmentos rectilíneos, de modo que dos consecutivos estén en distinta dirección y tal que el extremo de uno de ellos sea el origen del siguiente.

Si los extremos coinciden, se dice que la línea quebrada o poligonal es cerrada.



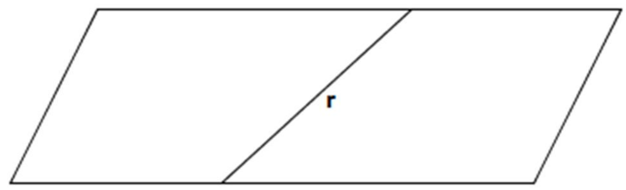
7) **LINEA MIXTA:** se llama línea mixta la que se compone de uno o más segmentos rectilíneos y de uno o más segmentos curvilíneos que tienen de dos en dos, un solo punto en común.



8) **PLANO:** La noción de plano es intuitiva, podríamos asociar a la superficie de un espejo bien pulimentado.

El plano es ilimitado en todas sus direcciones.

- **Semiplano:** se llama semiplano cada una de las dos partes en que una recta del plano lo divide. Dicha recta se llama borde del semiplano.



Postulados del plano:

- Si una recta tiene dos puntos en un plano, tiene todos sus puntos en dicho plano.
- Todo plano divide al espacio en dos regiones, situadas en distintos lados del plano. Cada una de estas regiones se llama semi espacio.
- Tres puntos no alineados determinan un plano.
- Una recta y un punto fuera de ella, o dos rectas que se cortan determinan un plano.

9) **FIGURAS GEOMETRICAS:**

- ***Figuras iguales*** son aquellas que tienen igual forma e igual tamaño.
- ***Figuras semejantes*** son aquellas que tienen igual forma pero distinto tamaño.
- ***Figuras equivalentes*** cuando tienen igual tamaño pero distinta forma.
- ***Superposición de figuras planas*:** para demostrar la igualdad de dos superficies acudimos a la superposición.

10) **Términos matemáticos utilizados:**

- **Axioma:** es una proposición evidente en sí misma y por tanto, no necesita demostración.

  Ejemplos: - El todo es igual a la suma de sus partes.

  - El todo es mayor que cada una de sus partes.

  - Dos cantidades iguales a una tercera son iguales entre sí.

- **Teorema:** es una proposición que para ser evidente necesita ser demostrada.
  Ejemplo: La suma de los ángulos internos de un triángulo es igual a dos angulos rectos.

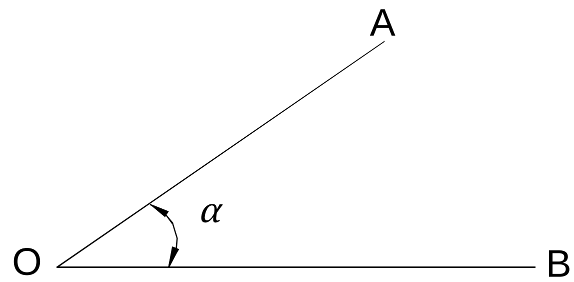
- **Postulado:** es una proposición que se admite sin demostración.
  Ejemplo: Por un punto fuera de una recta solo puede trazarse una paralela a dicha recta.

- **Corolario:** es un teorema cuya verdad se deduce de otro ya demostrado.

11) **ANGULOS:**

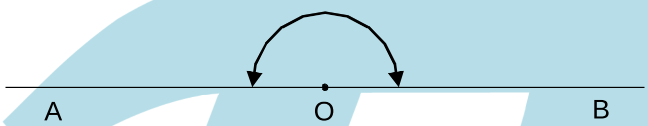
- **Haz de rectas:** es el conjunto de todas las rectas que pasan por un punto, llamado vértice o centro, y están situados en un plano.

- **Angulo plano:** Es cualquiera de las dos regiones del plano, determinada por dos semirrectas de mismo origen. Las semirrectas reciben el nombre de lados y el punto común de origen se llama vértice.



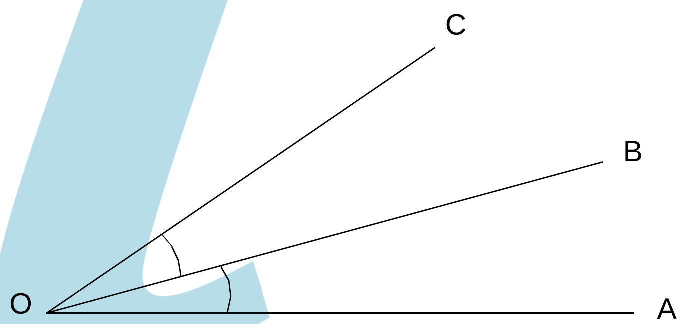
<u>Notación:</u> $\overset{\angle}{AOB}$; Angulo O ; $\overset{\angle}{\alpha}$

- **Angulo llano:** Cuando los lados del ángulo son semirrectas opuestas, cada una de las regiones del plano se llama ángulo llano.
El ángulo llano es igual a 2 ángulos rectos.



- **Igualdad de ángulos:** decimos que dos ángulos son iguales cuando pueden colocarse uno sobre otro, de manera que coincidan sus vértices y sus lados.

- **Ángulos consecutivos:** dos ángulos son consecutivos cuando tienen en común el vértice y un lado, y están colocados en distintos semiplanos, respecto del lado en común.



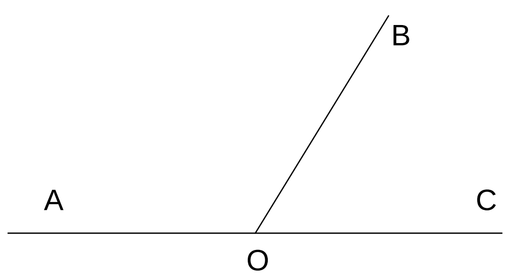
Decimos que tres o más ángulos son consecutivos, cuando son consecutivos dos a dos.

Si $\begin{cases} OB \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{ lado común.} \\ O \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{ vértice común.} \end{cases}$

$\therefore$ $\overset{\angle}{AOB}$ y $\overset{\angle}{BOC}$ son ángulos consecutivos.

- **Ángulos adyacentes:** dos ángulos son adyacentes cuando son consecutivos y sus lados no comunes están en línea recta o son semirrectas opuestas.

Si $\begin{cases} \overset{\angle}{AOB} \text{ y } \overset{\angle}{BOC} \text{ son consecutivos.} \\ \overline{OA} \text{ y } \overline{OC} \text{ están en línea recta.} \end{cases}$



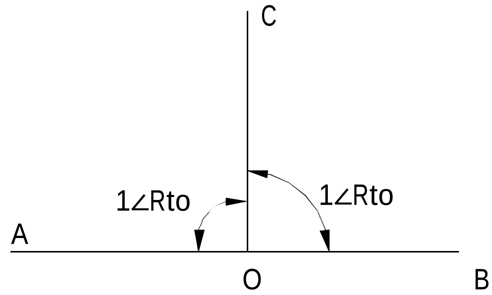
$\overset{\angle}{AOB}$ y $\overset{\angle}{BOC}$ son ángulos adyacentes.

- **Angulo recto:** cuando dos ángulos adyacentes son iguales, cada uno de ellos se llama Angulo recto.

  $\overset{\angle}{AOC}$ y $\overset{\angle}{COB}$ … … son adyacentes.

  $\overset{\angle}{AOC} = \overset{\angle}{COB}$

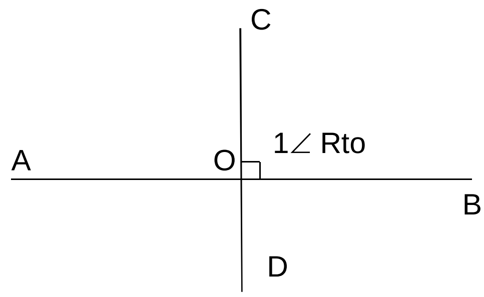
  $\therefore \quad \overset{\angle}{AOC} = \overset{\angle}{COB} = 1\angle Rto$



- **Rectas perpendiculares:** dos rectas son perpendiculares cuando al cortarse forman ángulos rectos o ángulos adyacentes iguales.

  $\overset{\angle}{AOC} = \overset{\angle}{COB}$

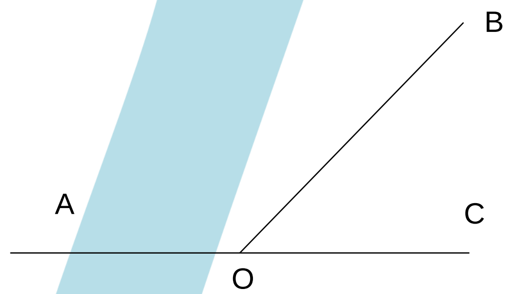
  $\therefore \quad CD \perp AB$



- **Rectas oblicuas:** dos rectas son oblicuas cuando al cortarse forman ángulos adyacentes desiguales.

  Si……………. $\overset{\angle}{AOB} \neq \overset{\angle}{BOC}$

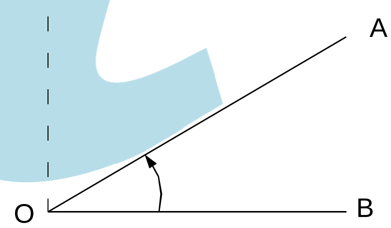
  OB $\not\perp$ AC



- **Angulo agudo:** es el Angulo menor que un Angulo recto.

  $\overset{\angle}{AOB} < 1\angle Rto.$

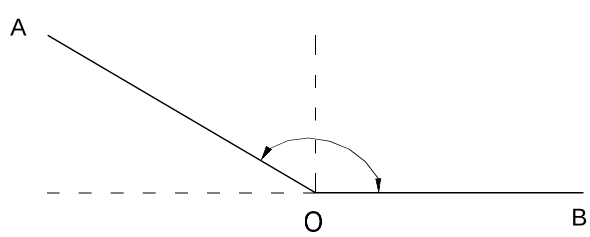
  $\therefore \quad \overset{\angle}{AOB}$… Angulo agudo.



- **Angulo obtuso:** es el Angulo mayor que un Angulo recto, pero menor que dos ángulos rectos.

  $1\angle Rto. < \overset{\angle}{AOB} < 2\angle Rto.$

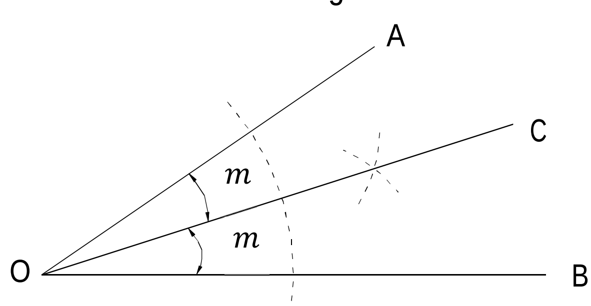
  $\therefore \quad \overset{\angle}{AOB}$………… Angulo obtuso.



- **Bisectriz de un Angulo:** es la semirrecta que partiendo del vértice del Angulo lo divide en dos partes iguales.

  $\overset{\angle}{AOC} = \overset{\angle}{COB}$

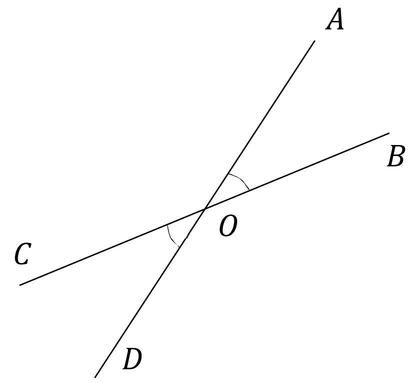
  $\therefore \quad OC$……Bisectriz de $\overset{\angle}{AOB}$



- **Ángulos opuestos por el vértice:** dos ángulos son opuestos por el vértice cuando tienen un vértice en común y los lados del uno son las prolongaciones de los lados del otro (O son semirrectas opuestas)

OD prolongación de OA.
OC prolongación de OB.

$\overset{\angle}{AOB}$ y $\overset{\angle}{COD}$ son opuestos por el vértice.

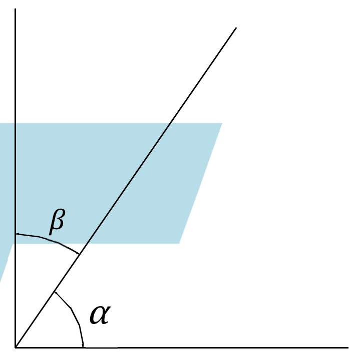


- **Ángulos complementarios:** son dos ángulos que sumados valen un ángulo recto, es decir 90°. Se llama complemento de un ángulo al ángulo que se debe añadir para formar un ángulo recto.

$\overset{\angle}{\alpha} + \overset{\angle}{\beta} = 1\angle Rto = 90°$

$\overset{\angle}{\alpha}$ es el complemento de $\overset{\angle}{\beta}$ y viceversa.

$\overset{\angle}{\alpha}$ y $\overset{\angle}{\beta}$ son complementarios.

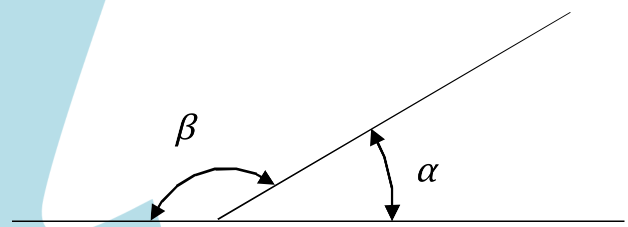


- **Ángulos suplementarios:** dos ángulos son suplementarios cuando al ser sumados valen 2 ángulos rectos o 180°.

$\overset{\angle}{\alpha} + \overset{\angle}{\beta} = 2\angle Rtos = 180°$

$\overset{\angle}{\alpha}$ y $\overset{\angle}{\beta}$ Son suplementarios.

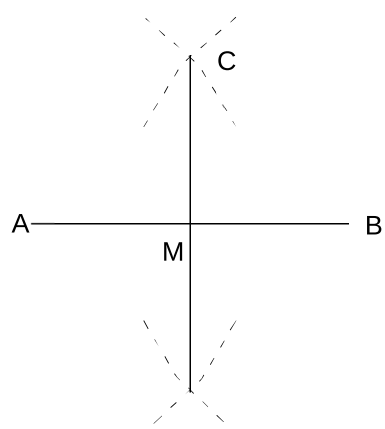
$\overset{\angle}{\alpha}$ es suplemento de $\overset{\angle}{\beta}$ y viceversa.



- **Mediatriz de un segmento de recta:** Es la recta perpendicular al segmento en el punto medio de este.

Si $\overline{AM} = \overline{MB}$

$CM \perp AB$



∴ CM Es mediatriz del segmento $\overline{AB}$

12) **MEDIDA DE ANGULOS:**

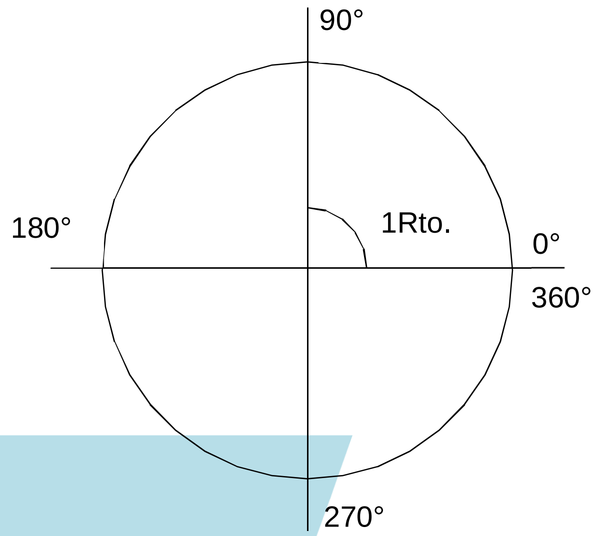
Para medir los ángulos son utilizados tres sistemas de unidades.

- **Sistema sexagesimal:** en este sistema se considera que el ángulo de una vuelta completa está dividida en 360 partes iguales que son denominados grados sexagesimales.

1 Vuelta completa = 360°

1° = 60'

1' = 60''



$1\ Cía\ =\ 360°$ ... En este caso queremos indicar que el arco de una cía. Completo, equivale a un Angulo de 360°.

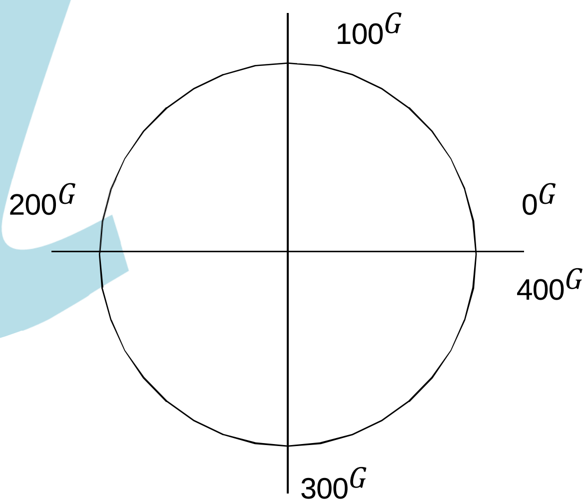
Si trazamos dos rectas perpendiculares en el vértice de un ángulo de una vuelta o de una Cía, lo tendremos dividido en 4 cuadrantes, cada uno de los cuales será 1 ángulo recto y medirá 90°.

- **Sistema centesimal:** este sistema considera que el ángulo de una vuelta completa está dividido en 400 partes iguales.

1 Cía. = 400^G

$1^G = 100^m$

$1^m = 100^S$



En este caso cada cuadrante de Cía. Medirá 100^G

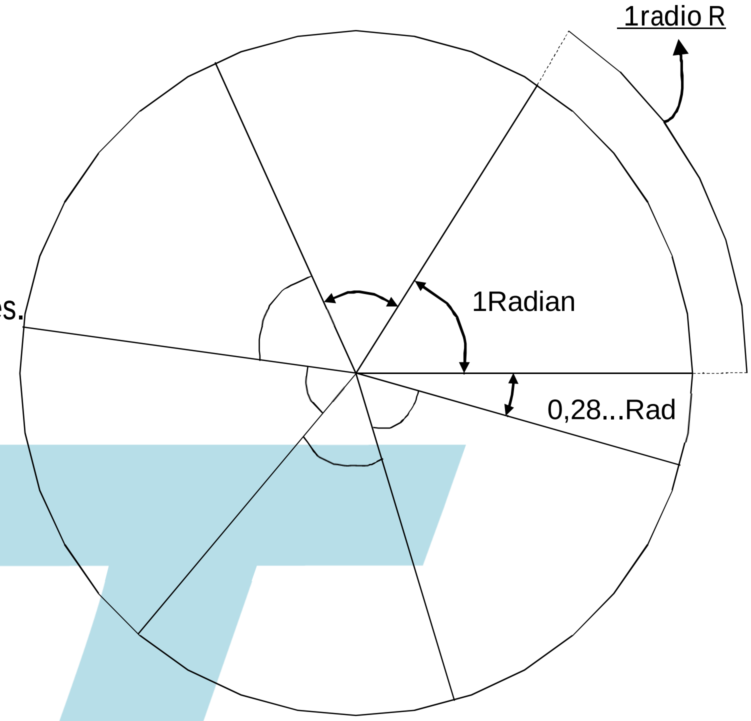
- **Sistema radian:** El sistema radian se fundamenta en el hecho de que la longitud de una circunferencia es igual a 6,28 veces el radio de dicha cía. Es decir, 2 π veces el radio.
  Esto significa que en cualquier circunferencia, si pudiéramos arquear o curvar el radio de dicha cía., este segmento de curva estará contenido 6,28… veces en la cía. (Perimetro)
  El ángulo central correspondiente a dicho arco es llamado 1 Radian

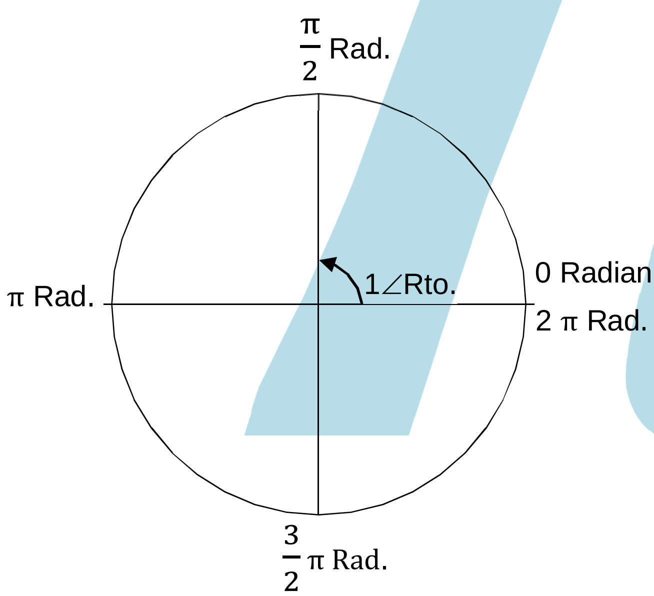
  Luego 1 Cía. = 6,28 Radianes.

  O mejor

  1 Cía. = 2 π Radianes.

  Luego 1 cuadrante de cía. es igual a $\frac{\pi}{2}$ Radianes.



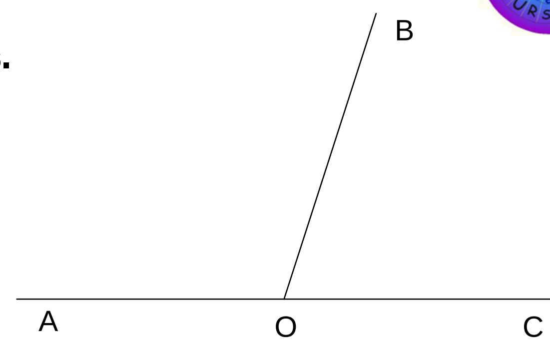


- **CONVERSIÓN DE ÁNGULOS A OTRO SISTEMA.**

Para pasar de un sistema a otro, se utiliza regla de tres simple, siendo las relaciones a utilizar:

$$360° \quad = \quad 400^{G} \quad = \quad 2\,\pi\; Radianes.$$

TEOREMA: Dos ángulos adyacentes son suplementarios.



H) $\angle AOB$ y $\angle BOC$ son adyacentes

T) $\angle AOB + \angle BOC = 2\angle$ Rtos.

D) $\angle AOB + \angle BOC = \angle AOC$ …………………… (1)……………………Por suma de ángulos.

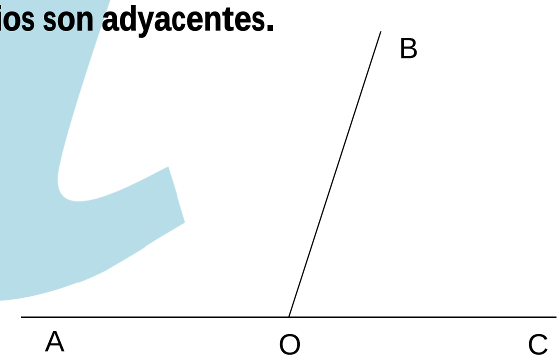
Por hipótesis sabemos que los ángulos $\angle AOB$ y $\angle BOC$ son adyacentes, luego los lados OA y OC están en línea recta o son semirrectas opuestas.

Es decir, $\angle AOC$ = 1 ángulo llano = $2\angle Rtos$ ……………….. (2)

Por el axioma: "Dos magnitudes iguales a una tercera son iguales entre sí"

Luego: $\angle AOB + \angle BOC = 2\angle$ Rtos.

TEOREMA: Dos ángulos consecutivos y suplementarios son adyacentes.



H) $\angle AOB$ y $\angle BOC$ son ángulos consecutivos.

$\angle AOB + \angle BOC = 2\angle$ Rtos.

T) $\angle AOB$ y $\angle BOC$ son adyacentes.

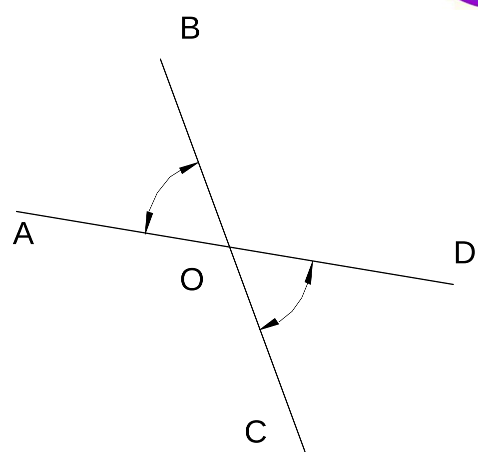
D) Para demostrar que estos dos ángulos son adyacentes debemos demostrar que los lados no comunes OA y OC son semirrectas opuestas, pues los ángulos ya son consecutivos por hipótesis.

En efecto si la prolongación de AO no coincidiese con OC, la suma de los ángulos $\angle AOB$ y $\angle BOC$ no valdría $2\angle$ Rtos, lo cual es contrario a la hipótesis.

Por tanto debemos aceptar que OA y OC están en línea recta

$\angle AOB$ y $\angle BOC$ son adyacentes.

TEOREMA: Dos ángulos opuestos por el vértice son iguales.



H) $\overset{\angle}{AOB}$ y $\overset{\angle}{COD}$ son opuestos por el vértice.

T) $\boxed{\overset{\angle}{AOB} = \overset{\angle}{COD}}$

D) $\overset{\angle}{AOB} + \overset{\angle}{AOC} = 2\angle\, Rtos$……………………….(1) ………………... Por ser ángulos adyacentes, pues al ser opuestos por el vértice OB es la prolongación de OC.

Análogamente tendremos:

$\overset{\angle}{COD} + \overset{\angle}{AOC} = 2\angle\, Rtos$……………………(2)……………………. Por el mismo motivo anterior.

Los segundos miembros de (1) y (2) son iguales

Luego: $\overset{\angle}{AOB} + \overset{\angle}{AOC} = \overset{\angle}{COD} + \overset{\angle}{AOC}$

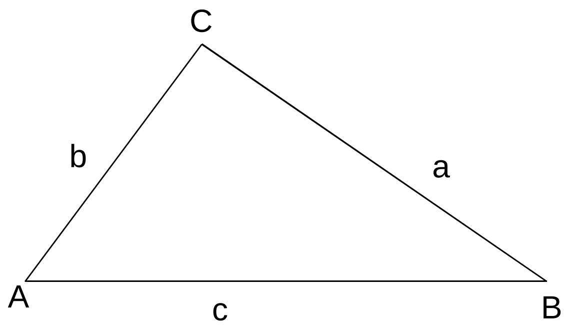
Transponiendo términos y simplificando

Tendremos: $\boxed{\overset{\angle}{AOB} = \overset{\angle}{COD}}$ Que es la tesis

Análogamente podríamos demostrar que los ángulos opuestos por el vértice $\overset{\angle}{AOC} = \overset{\angle}{BOD}$

TRIÁNGULOS

1) **Triángulo:** Es la porción del plano limitada por tres segmentos rectilíneos que tienen dos a dos un extremo común que se llaman vértices y a los segmentos se les llaman lados del triángulo.



$\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{BC}$............Lados del triángulo

A , B , C.....................Vértices del triángulo

$\angle A$; $\angle B$; $\angle C$ ....Ángulos internos del triángulo.

A los lados del triángulo se acostumbra denominar con la letra minúscula, al ángulo opuesto

Lado $\overline{BC}$ = lado a

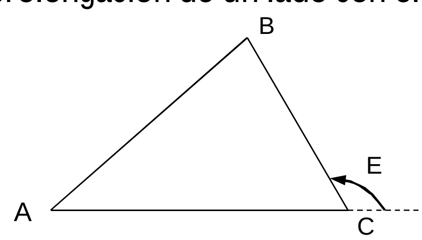
Lado $\overline{AC}$ = Lado b.

2) **Elementos de un triángulo:**

a) ***Ángulo interno de un triángulo:*** es el formado por dos cualesquiera de sus lados y se lo denomina con la letra mayúscula. Ejemplo: Ángulo $\angle A$; $\angle B$; $\angle C$

b) ***Ángulo externo de un triángulo:*** es el ángulo formado por la prolongación de un lado con el lado adyacente a dicho lado

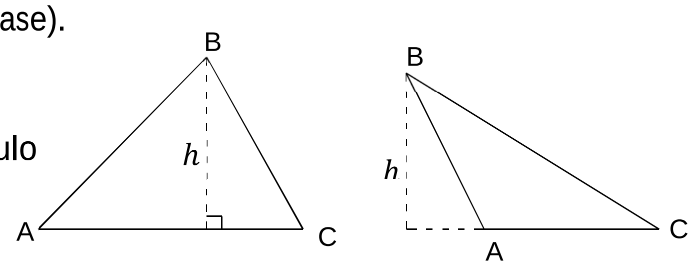
$\angle E$...............ángulo externo respecto al lado $\overline{AC}$



c) ***Base de un triángulo:*** es un lado cualquiera de un triángulo.

d) ***Altura de un triángulo:*** es el segmento de la $\perp$ trazada desde un vértice al lado opuesto o a su prolongación (considerado ahora como base).

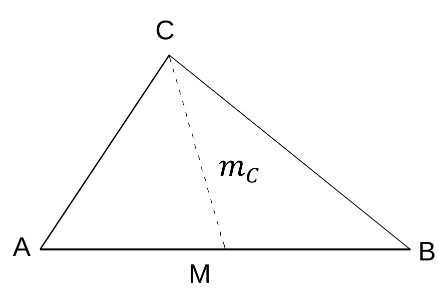
h = altura relativa al lado AC del triángulo



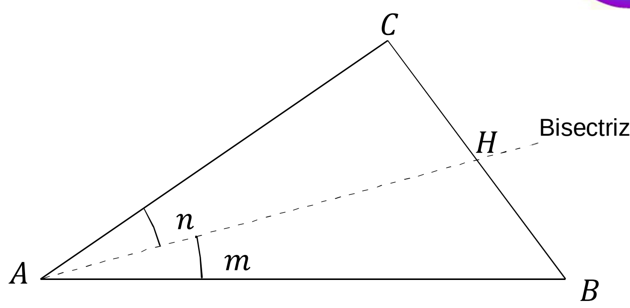
e) ***Mediana relativa a un lado:*** es el segmento de recta que une el puto medio de dicho lado al vértice opuesto.

Si $\overline{AM} = \overline{MB}$

Luego $\overline{CM} = m_c$ Mediana relativa a $\overline{AB}$



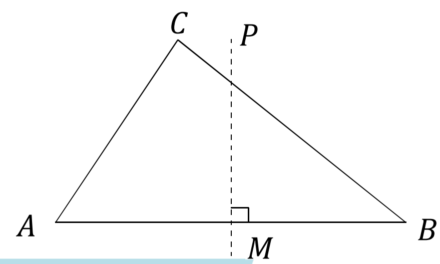
f) ***Bisectriz de un ángulo de un triángulo:*** es la semirecta que parte del vértice y divide al ángulo en dos partes iguales



Si $\overset{\angle}{m} = \overset{\angle}{n}$

AH Bisectriz del ángulo $\overset{\angle}{A}$ del triángulo.

g) ***Mediatriz respecto a un lado de un triángulo:*** Es la $\perp$ trazada por el punto medio de dicho lado.



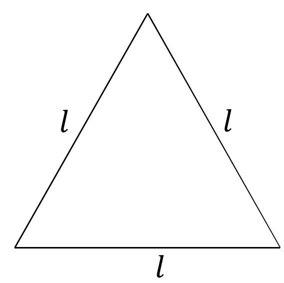
Si $\begin{cases} \overline{AM} = \overline{MB} \\ PM \perp AB \end{cases}$

Luego: PM.........Mediatriz respecto a $\overline{AB}$

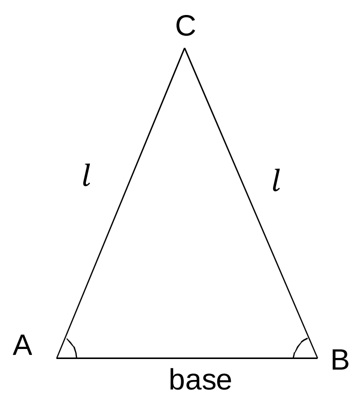
3) <u>Clasificación de los triángulos</u>: los triángulos son clasificados en dos grupos.

a) <u>Clasificación según sus lados:</u>

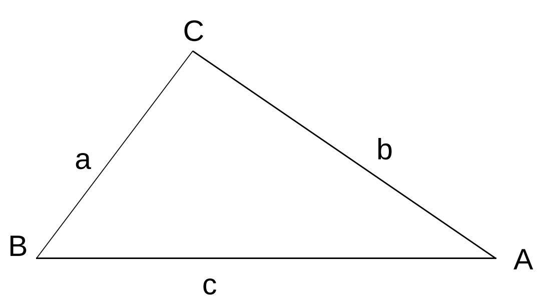
- <u>Triángulo equilátero:</u> es el que tiene sus tres lados iguales.



- <u>Triángulo isósceles:</u> es el que tiene dos lados iguales y el tercero desigual. (generalmente llamado base)



- <u>Triangulo escaleno:</u> es el triángulo que tiene sus tres lados desiguales



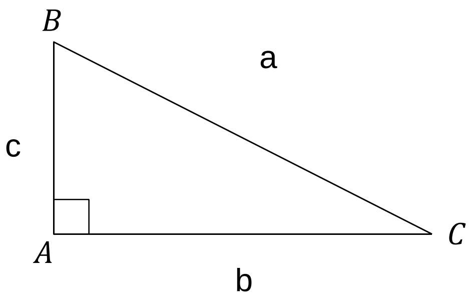
$a \neq b$;

$a \neq c \;\; y \; b \neq c$

b) Clasificación según sus ángulos:

❖ Triangulo rectángulo: es el triángulo que tiene un ángulo recto.

Los lados que forman el ángulo recto se llaman catetos y el lado opuesto al ángulo recto se llama hipotenusa.



$\angle A$ = 1 ∠ Recto

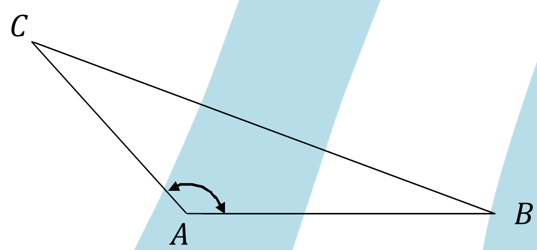
a = hipotenusa

b y c ……… catetos

❖ Triángulos oblicuángulos: cuando no tienen ningún ángulo recto.

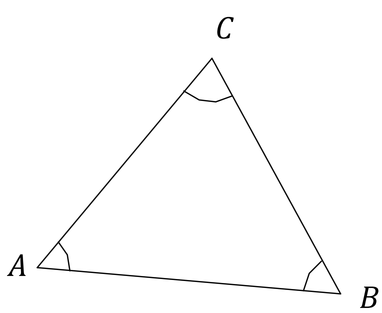
A su vez estos triangulos se clasifican.

❖ Triangulo obtusángulo: es el que tiene un ángulo obtuso.



$\angle A$ ……..Obtuso

❖ Triángulo Acutángulo: es el que tiene sus tres ángulos agudos.



$$\left.\begin{array}{l} \angle A \ldots\ldots\ldots \\ \angle B \ldots\ldots\ldots \\ \angle C \ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \text{Ángulos agudos}$$

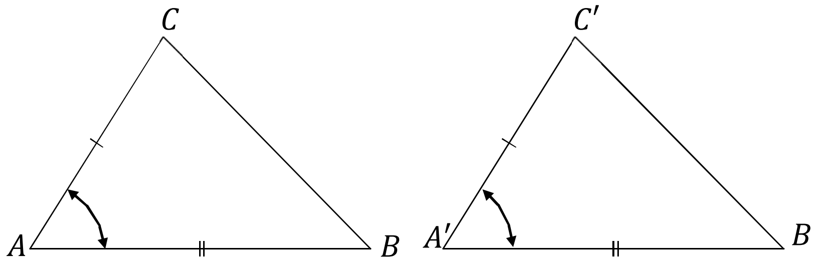
Obs.: Triangulo Equiángulos: cuando sus tres ángulos son iguales

a) ***Si dos triángulos tienen respectivamente iguales dos lados y el ángulo comprendido, son iguales.***

H) $\overline{AB} = \overline{A'B'}$

$\overline{AC} = \overline{A'C'}$

$\overset{\angle}{A} = \overset{\angle}{A'}$



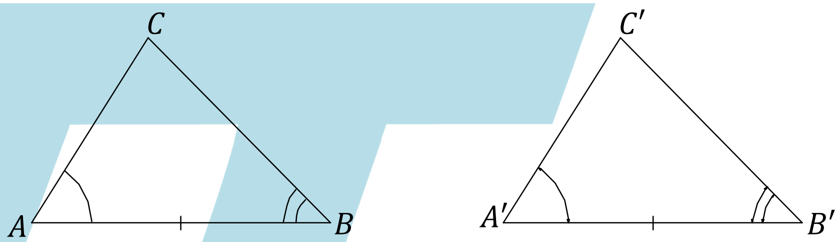
T) $\overset{\triangle}{ABC} = \overset{\triangle}{A'B'C'}$

b) ***Si dos triángulos tienen respectivamente iguales un lado y los ángulos adyacentes a este lado, son iguales.***

H) $\overline{AB} = \overline{A'B'}$

$\overset{\angle}{A} = \overset{\angle}{A'}$

$\overset{\angle}{B} = \overset{\angle}{B'}$



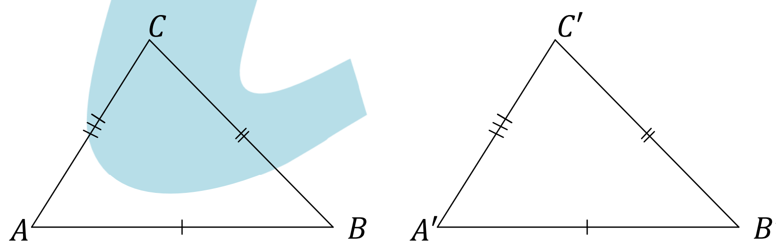
T) $\overset{\triangle}{ABC} = \overset{\triangle}{A'B'C'}$

c) ***Si dos triángulos tienen respectivamente iguales sus tres lados, son iguales.***

H) $\overline{AB} = \overline{A'B'}$

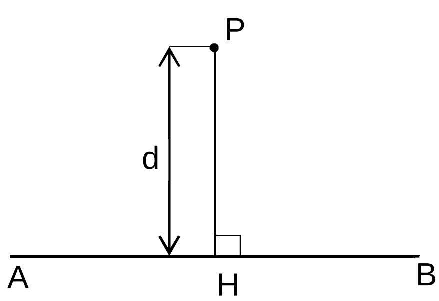
$\overline{BC} = \overline{B'C'}$

$\overline{AC} = \overline{A'C'}$



T) $\overset{\triangle}{ABC} = \overset{\triangle}{A'B'C'}$

<u>Distancia de un punto a una recta:</u> Es la longitud del segmento perpendicular comprendido entre el punto y la recta.



$\overline{PH} \perp \overline{AB}$

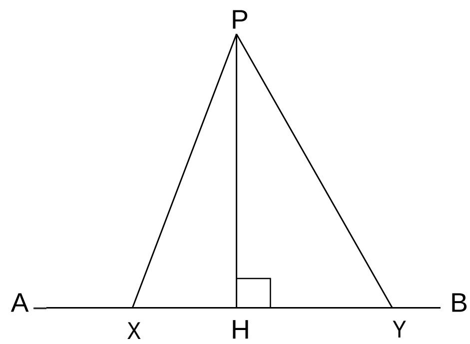
$\overline{PH}$..............distancia de P a la recta $\overline{AB}$

Este segmento tiene la propiedad de ser único y el menor posible.

TEOREMAS RELATIVOS A LAS RECTAS PERPENDICULARES E OBLICUAS TRAZADAS A UNA RECTA POR UN PUNTO EXTERIOR A LA MISMA.

Si desde un punto exterior a una recta se trazan a dicha recta una $\perp$ y varias oblicuas, se verifica...

a) **El segmento de la perpendicular es la más corta de todas.**



H) P es un punto exterior a AB

PH $\perp$ AB

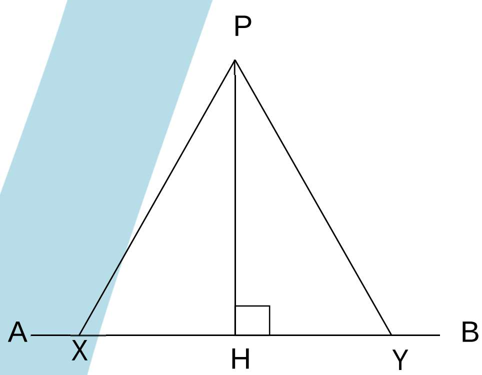
$\overline{PX}$ y $\overline{PY}$ son oblicuas a AB

T) $\overline{PH}$ es el menor de todos los segmentos.

Es decir: $\overline{PH} < \overline{PX}$

$\overline{PH} < \overline{PY}$

b) **Dos oblicuas cuyos pies equidistan del de la $\perp$ común, son iguales.**



H) P punto exterior a AB

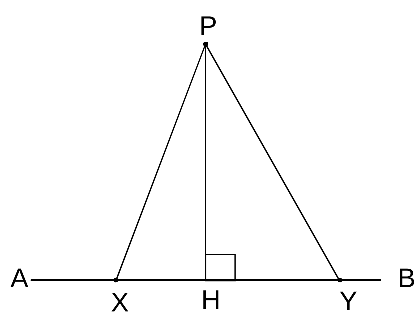
PH $\perp$ AB

$\overline{PX}$ y $\overline{PY}$ $\not\perp$s AB

$\overline{HX} = \overline{HY}$

T) $\overline{PX} = \overline{PY}$

c) **Dos oblicuas cuyos pies no equidistan del de la $\perp$ común, es mayor la que más dista.**



H) P es un punto exterior a AB

$\overline{PX}$ y $\overline{PY}$ $\not\perp$s AB

$\overline{HX} < \overline{HY}$

T) $\overline{PX} < \overline{PY}$

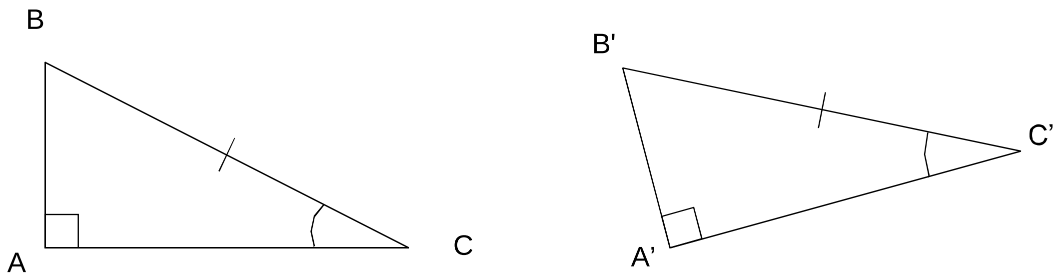
Obs.: Los teoremas recíprocos también son verdaderos, es decir:

Si desde un punto exterior trazamos dos oblicuas a una recta, se verifica:

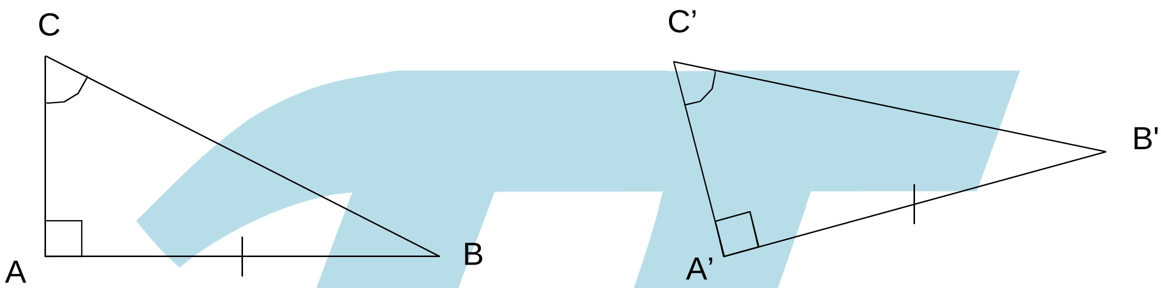
- Si las oblicuas son iguales, sus pies equidistan del pie de la $\perp$ común.
- Si dos oblicuas son desiguales, el pie de la mayor dista más del pie de la $\perp$ común.

CASOS DE IGUALDAD DE TRIANGULOS RECTANGULOS:

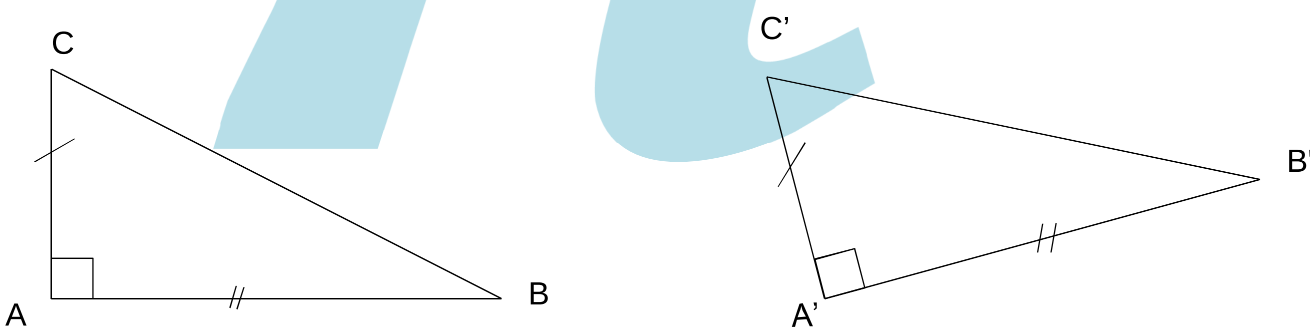
a) La hipotenusa y un ángulo agudo iguales.



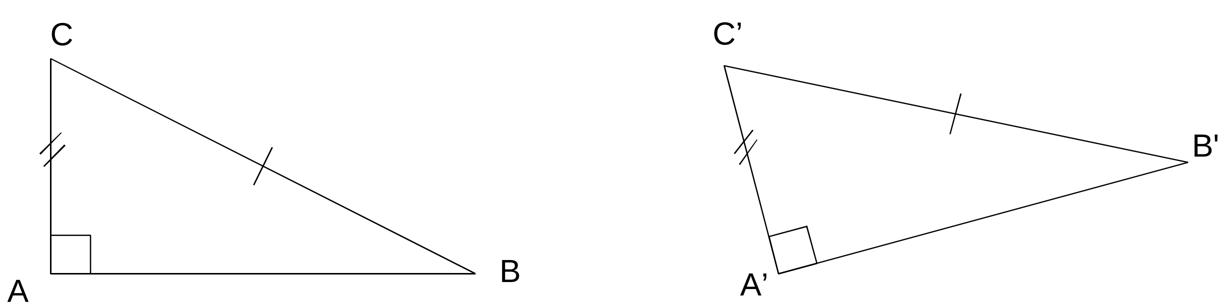
b) Un cateto y un ángulo agudo iguales.



c) Los dos catetos iguales.



d) La hipotenusa y un cateto iguales.



Rectas Paralelas: Dos rectas son paralelas entre si cuando situados en un mismo plano no tienen ningún punto en común, es decir que al ser prolongadas no se encuentran.

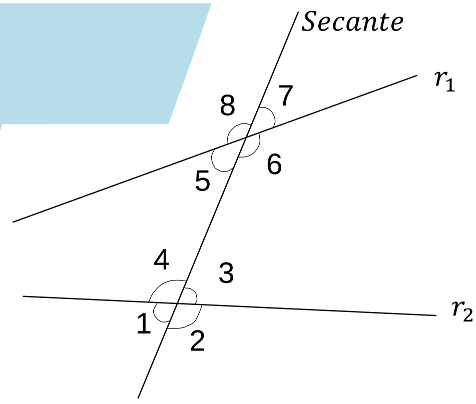
Axioma del paralelismo: Por un punto exterior a una recta no puede trazarse a esta recta más que una paralela.

Rectas secantes o transversales a otra:

Una recta es secante o transversal de otra cuando lo corta.

Dos rectas no pueden cortarse más que en un punto.

ÁNGULOS FORMADOS CUANDO UNA TRANSVERSAL CORTA A OTRAS 2 RECTAS.



Ángulos internos: Son los ángulos comprendidos entre r_1 y r_2.

$\{ \angle 3 \;;\; \angle 4 \;;\; \angle 5 \;;\; \angle 6$

Ángulos externos: Son los ángulos que están fuera de r_1 y r_2.

$\{ \angle 1 \;;\; \angle 2 \;;\; \angle 7 \;;\; \angle 8$

Ángulos conjugados (o de un mismo lado de la secante).

$$\begin{cases} \angle 2 \;;\; \angle 3 \;;\; \angle 6 \; y \; \angle 7 \\ \angle 1 \;;\; \angle 4 \;;\; \angle 5 \; y \; \angle 8 \end{cases}$$

Ángulos alternos: Ángulos que están ubicados a diferentes lados de la secante. $\angle 3 \; y \; \angle 5$; $\angle 2 \; y \; \angle 8$; $\angle 1 \; y \; \angle 7$; $\angle 4 \; y \; \angle 6$

Ángulos alternos internos: Dos ángulos que están a diferentes lados de la transversal y ambos internos. $\angle 3 \; y \; \angle 5$; $\angle 4 \; y \; \angle 6$

Ángulos alternos externos: Dos ángulos que estén a diferente lado de la transversal y ambos externos. $\angle 2 \; y \; \angle 8$; $\angle 1 \; y \; \angle 7$

Conjugados internos: Dos ángulos que están de un mismo lado de la transversal y ambos extremos.
$\angle 3 \; y \; \angle 6$; $\angle 4 \; y \; \angle 5$

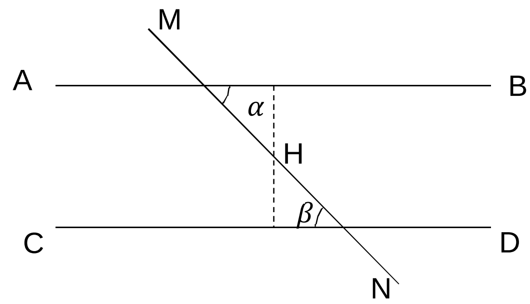
Conjugados externos: Ángulos que están de un mismo lado de la transversal y ambos externos.
$\angle 2 \; y \; \angle 7$; $\angle 1 \; y \; \angle 8$

Correspondientes: Son dos ángulos que están de un lado de la secante uno externo y otro interno.
$\angle 1 \; y \; \angle 5$; $\angle 4 \; y \; \angle 8$; $\angle 3 \; y \; \angle 7$

TEOREMAS RELATIVOS A LOS ANGULOS DETERMINADOS CUANDO DOS RECTAS PARALELAS SON CORTADAS POR UNA SECANTE.

Si dos paralelas son cortadas por una transversal se verifica:

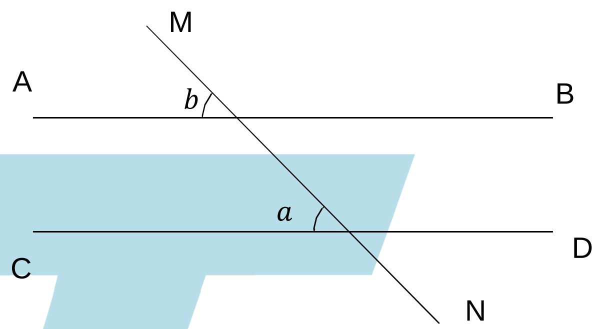
a) ***Los ángulos alternos internos son iguales.***



H) AB // CD
MN es una transversal común.
α y β son alternos internos

T) $\alpha = \beta$

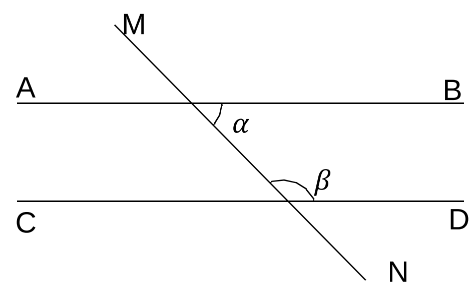
b) ***Los ángulos correspondientes son iguales.***



H) AB // CD
MN es una transversal común.
$\overset{\angle}{a}$ y $\overset{\angle}{b}$ son correspondientes

T) $\overset{\angle}{a} = \overset{\angle}{b}$

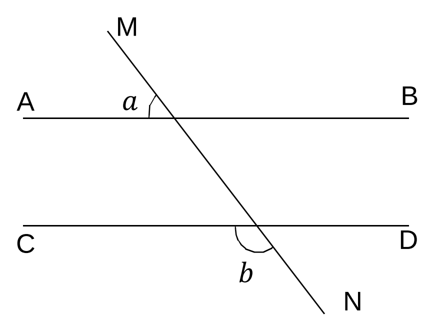
c) ***Los ángulos internos de un mismo lado de la secante son suplementarios(conjugados internos)***



H) AB // CD
MN transversal común
$\overset{\angle}{\alpha}$ y $\overset{\angle}{\beta}$ ángulos internos de un mismo lado de la secante

T) $\overset{\angle}{\alpha} + \overset{\angle}{\beta} = 2 \angle Rtos = 180°$

d) ***Los ángulos externos de un mismo lado de la secante son suplementarios***



H) AB // CD
MN transversal común
$\overset{\angle}{a}$ y $\overset{\angle}{b}$ ángulos externos de un mismo lado de la secante

T) $\overset{\angle}{a} + \overset{\angle}{b} = 2 \angle Rtos = 180°$

Obs.: Los teoremas recíprocos a estos son verdaderos.

Ejemplos:

- Si una secante corta a dos rectas y determina ángulos alternos internos iguales, dichas rectas son paralelas.

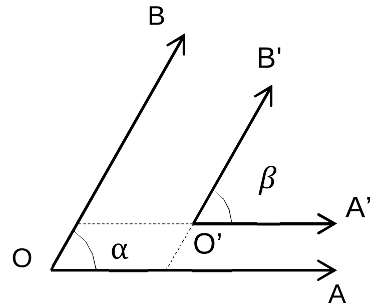
- Si una secante corta a dos rectas y determina ángulos internos de un mismo lado de la secante suplementarios, dichas rectas son paralelas.

TEOREMAS RELATIVOS A LOS ANGULOS DE LADOS RESPECTIVAMENTE PARALELOS.

- **Dos ángulos que tienen sus lados respectivamente paralelos y dirigidos en el mismo sentido son iguales.**

H) $\left.\begin{array}{l} OA \parallel O'A' \\ OB \parallel O'B' \end{array}\right\}$ Y dirigidos en el mismo sentido

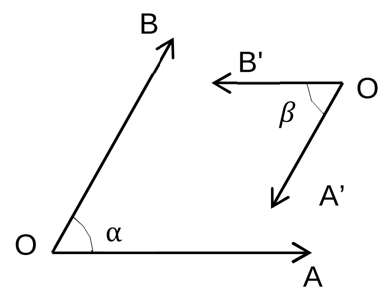
T) $\overset{\angle}{\alpha} = \overset{\angle}{\beta}$



a) **Dos ángulos que tienen sus lados respectivamente paralelos y dirigidos en sentidos contrarios son iguales.**

H) $\left.\begin{array}{l} OA \parallel O'A' \\ OB \parallel O'B' \end{array}\right\}$ Y dirigidos ambos en sentidos contrarios

T) $\overset{\angle}{\alpha} = \overset{\angle}{\beta}$

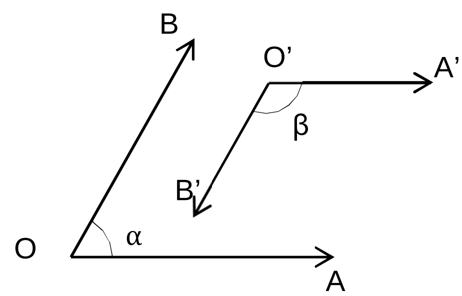


b) **Dos ángulos que tienen sus lados respectivamente paralelos, dos de ellos dirigidos en el mismo sentido y los otros dos en sentidos contrarios son suplementarios.**

H) $OA \parallel O'A'$ y dirigidos en el mismo sentido.

$OB \parallel O'B$ y dirigidos en sentidos contrarios.

T) $\overset{\angle}{\alpha} + \overset{\angle}{\beta} = 2 \angle \text{Rtos} = 180°$



TEOREMAS RELATIVOS A LOS ANGULOS QUE TIENEN SUS LADOS RESPECTIVAMENTE PERPENDICULARES

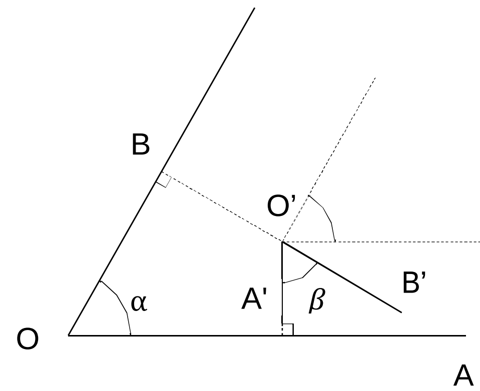
a) Dos ángulos que tienen sus lados respectivamente perpendiculares y ambos son agudos, son iguales

H) O'A' $\perp$ OA

O'B' $\perp$ OB

$\overset{\angle}{\alpha}$ y $\overset{\angle}{\beta}$ ángulos agudos

T) $\overset{\angle}{\alpha} = \overset{\angle}{\beta}$



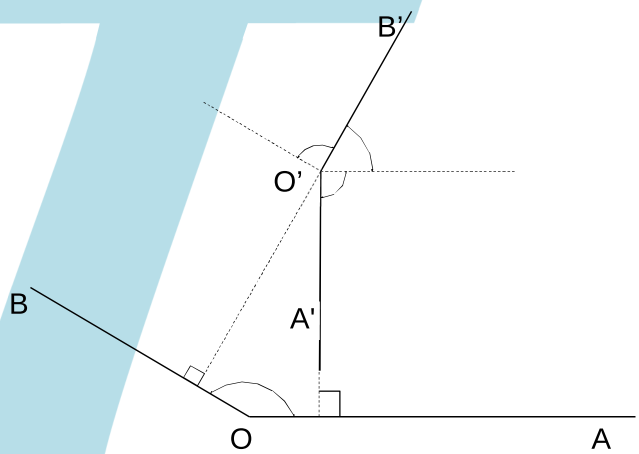
b) Dos ángulos que tienen sus lados respectivamente $\perp$s y ambos son obtusos, son iguales.

H) O'B' $\perp$ OB

O'A' $\perp$ OA

$\overset{\angle}{AOB}$ y $\overset{\angle}{A'O'B'}$ son ángulos obtusos

T) $\overset{\angle}{AOB} = \overset{\angle}{A'O'B'}$



c) Dos ángulos que tienen sus lados respectivamente perpendiculares, uno de ellos agudo y el otro obtuso, son suplementarios.

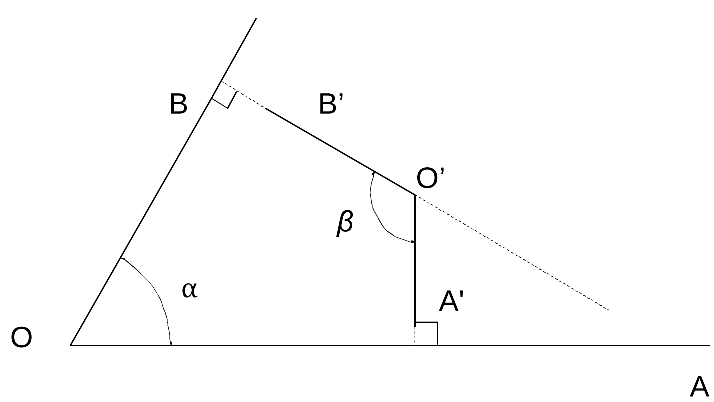
H) O'A' $\perp$ OA

O'B' $\perp$ OB

α ángulo agudo.

β ángulo obtuso.

T) $\overset{\angle}{\alpha} + \overset{\angle}{\beta} = 2 \angle$ Rtos = 180°



Lugar geométrico de puntos: Es el conjunto de puntos que tienen una propiedad en común que solo a ellos pertenece.

Ejemplo1:

El conjunto de puntos del plano que equidista de un punto del mismo plano es una Cía.

La propiedad en común que tienen todos estos puntos es la de estar a una misma distancia del centro.

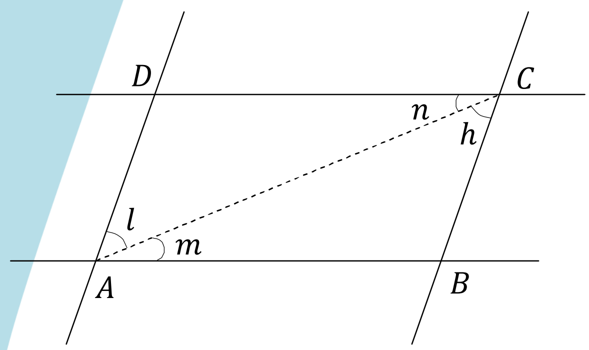
Entonces podemos decir. El lugar geométrico del plano que equidista de un punto es la cía.

Ejemplo2:

El lugar geométrico del plano que equidista de una recta, son dos rectas paralelas a dicha recta, a una mima distancia de esta.

TEOREMA

Los segmentos determinados en dos rectas paralelas por otras dos rectas paralelas, son iguales.



H) $AB /\!/ DC$

$AD /\!/ BC$

T) $\overline{AB} = \overline{CD}$

$\overline{AD} = \overline{BC}$

D) Trazando el segmento $\overline{AC}$ quedan formadas los siguientes triángulos

$\overset{\triangle}{ABC} = \overset{\triangle}{ADC}$ ....

$\overline{AC} = \overline{AC}$ ... ... Lado común.

$\overset{\angle}{m} = \overset{\angle}{n}$ ... ... Alternos internos entre / /s

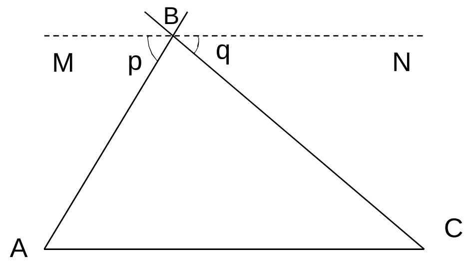
$\overset{\angle}{l} = \overset{\angle}{h}$ ... ... Alternos internos entre / /s

Por igualdad de triangulos que tienenun lado y los angulos adyacentes a dicho lados iguales.

Luego: $\begin{cases} \overline{AB} = \overline{CD} \\ \overline{AD} = \overline{BC} \end{cases}$ ....Que es la tesis.

TEOREMA

La suma de los ángulos (interiores) de un triángulo es igual a dos ángulos rectos.



H) $\overset{\triangle}{ABC}$ es un triángulo cualquiera.

$\overset{\angle}{A}, \overset{\angle}{B}\ y\ \overset{\angle}{C}$ son ángulos interiores del $\overset{\triangle}{ABC}$

T) $\boxed{\overset{\angle}{A} + \overset{\angle}{B} + \overset{\angle}{C} = 2\angle \text{Rtos}}$

D) Trazamos por el vértice B una recta paralela al lado AC.

$\overset{\angle}{p} + \overset{\angle}{B} + \overset{\angle}{q} = 2\angle\text{Rtos}$.............................. (1) ....Por ser esta suma igual a un Angulo llano.

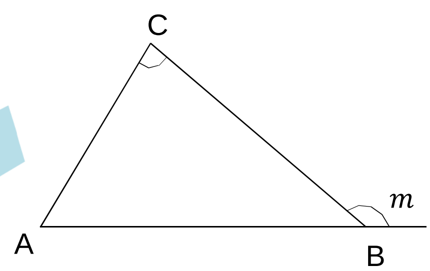
Pero: $\left\{ \begin{array}{l} \overset{\angle}{q} = \overset{\angle}{C} \\ \overset{\angle}{p} = \overset{\angle}{A} \end{array} \right\}$............................ Por ser angulos alternos internos comprendidos entre rectas paralelas $MN // AC$ … … . construción

Llevando estas dos igualdades en (1) tendremos:

$\boxed{\overset{\angle}{A} + \overset{\angle}{B} + \overset{\angle}{C} = 2\angle\, Rtos.}$ .... Que es la tesis.

TEOREMA

Un ángulo exterior de un triángulo es igual a la suma de los interiores no adyacentes



H) $\overset{\triangle}{ABC}$ es un triángulo cualquiera

$\overset{\angle}{m}$ es un ángulo exterior al $\overset{\triangle}{ABC}$

$\overset{\angle}{A}$ y $\overset{\angle}{C}$ ángulos interiores no adyacentes a $\overset{\angle}{m}$

T) $\boxed{\overset{\angle}{m} = \overset{\angle}{A} + \overset{\angle}{C}}$

D) $\overset{\angle}{m} + \overset{\angle}{B} = 2\angle\text{Rtos}$............................... (1) Por adyacentes

$\overset{\angle}{A} + \overset{\angle}{B} + \overset{\angle}{C} = 2\angle\text{Rtos}$.....................(2) ....Porque la suma de los ángulos internos de un triángulo es igual a 2∠Rtos.

Los 2º miembros de (1) y (2) son iguales.

Luego: $\overset{\angle}{m} + \overset{\angle}{B} = \overset{\angle}{A} + \overset{\angle}{B} + \overset{\angle}{C}$

Transponiendo $\overset{\angle}{\text{B}}$ al 2º miembro y simplificando

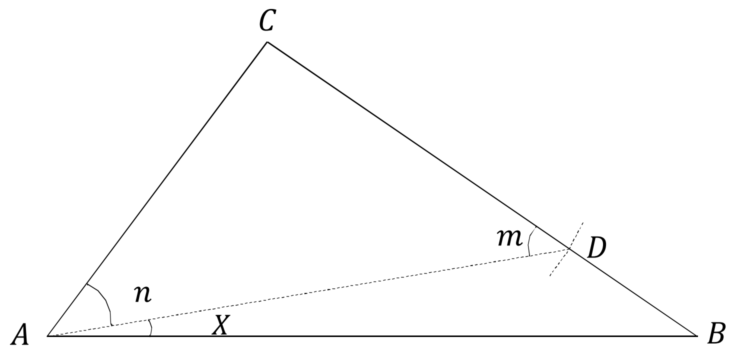
Tendremos: $\boxed{\overset{\angle}{m} = \overset{\angle}{A} + \overset{\angle}{C}}$ ....Que es la tesis.

TEOREMA

Si dos lados de un triángulo son desiguales, a mayor lado se opone mayor ángulo.

H) $\overset{\triangle}{ABC}$ es un triángulo cualquiera

$\overline{BC} > \overline{AC}$



T) $\boxed{\overset{\angle}{A} > \overset{\angle}{B}}$

D) A partir del vértice C del triángulo tomamos un punto D tal que $\overline{CD} = \overline{AC}$

Uniendo este punto D con el vértice A tendremos triangulo isósceles.

$\overset{\triangle}{ACD}$.. $\overline{AC} = \overline{CD}$

Luego también tendremos $\overset{\angle}{n} = \overset{\angle}{m}$

Considerando el triángulo $\overset{\triangle}{ADB}$ tendremos

$\overset{\angle}{m} = \overset{\angle}{X} + \overset{\angle}{B}$ .... Por ser ángulo externo del triángulo.

Luego: $\overset{\angle}{m} > \overset{\angle}{B}$

Pero $\overset{\angle}{m} = \overset{\angle}{n}$ como ya demostramos

Luego $\overset{\angle}{n} > \overset{\angle}{B}$

Pero también tenemos que $\overset{\angle}{A} > \overset{\angle}{n}$

Entonces por el carácter transitivo de las desigualdades

Podemos escribir: $\boxed{\overset{\angle}{A} > \overset{\angle}{B}}$ ....Que es la tesis.

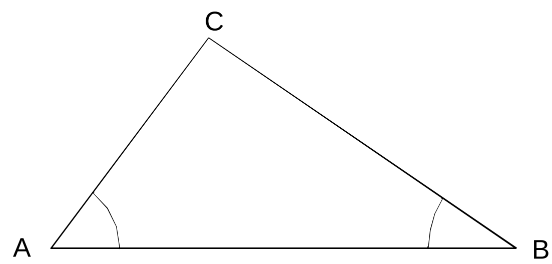
TEOREMA

Si dos ángulos de un triángulo son desiguales, a mayor ángulo se opone mayor lado.

H) $\overset{\triangle}{ABC}$ es un triángulo cualquiera.

$\overset{\angle}{A} > \overset{\angle}{B}$

T) $\boxed{\overline{CB} > \overline{AC}}$



D) Supongamos que $\overline{CB} \not> \overline{AC}$

Entonces sobrarían dos posibilidades

- $\overline{CB} = \overline{AC}$ ....Esta posibilidad implicaría que $\overset{\angle}{A} = \overset{\angle}{B}$ pues tendremos un triángulo isósceles lo cual vá contra la hipótesis.

- $\overline{CB} < \overline{AC}$...........Esta posibilidad implicaría $\overset{\angle}{A} < \overset{\angle}{B}$ por el teorema. “A mayor lado se opone mayor ángulo”. También va contra la hipótesis.

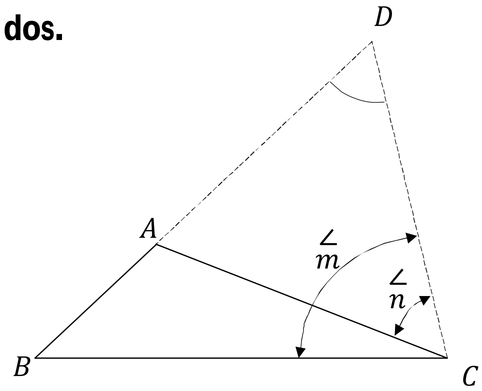
No pudiendo ser $\overline{CB}$ ni igual ni menor que $\overline{AC}$, entonces por la propiedad de Tricotomía, Forzosamente ha de ser:

$\boxed{\overline{CB} > \overline{AC}}$ ....Que es la tesis.

<u>TEOREMA</u>

Cada lado de un triángulo es menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia. Para demostrar este teorema lo dividimos es dos partes.

a) **Cada lado de un triángulo es menor que la suma de los otros dos.**



H$_1$) $\overset{\triangle}{ABC}$ Triángulo cualquiera.
$\overline{BC}$ lado mayor

T$_1$) $\overline{BC} < \overline{AB} + \overline{AC}$

D) El teorema es evidente para cualquier lado menor, por eso lo demostraremos únicamente para el lado mayor $\overline{BC}$

Prolonguemos el lado BA y en esta prolongación tomemos $\overline{AD} = \overline{AC}$
Unamos el punto D con el vértice C.

En estas condiciones se forma el triángulo..... $\overset{\triangle}{DAC}$.....Isósceles, porque..... $\overline{AD} = \overline{AC}$....p/construcción

Luego: $\overset{\angle}{D} = \overset{\angle}{n}$ .... $\overline{AD} = \overline{AC}$.................... A ángulos iguales se oponen lados iguales

Pero: $\overset{\angle}{n} < \overset{\angle}{m}$ ....De donde....................$\overset{\angle}{D} < \overset{\angle}{m}$ .... (1)

Considerando el triángulo $\overset{\triangle}{BCD}$ tendremos:
$\overline{BC} < \overline{BD}$..(2)........................... porque a mayor ángulo se opone mayor lado..................................Por ecuación (1)

Pero ....$\overline{BD} = \overline{AB} + \overline{AD} = \overline{AB} + \overline{AC}$ ....$\overline{AD} = \overline{AC}$................p/construcción.

Sustituyendo $\overline{BD}$ por su igual en la ecuación (2)

Tendremos:....................................... $\overline{BC} < \overline{AB} + \overline{AC}$ .... Que es la tesis.

b) **Cada lado de un triángulo es mayor que la diferencia de los otros dos.**

H$_2$) $\overset{\triangle}{ABC}$ es un triángulo cualquiera
$\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ son los lados menores.

T$_2$) $\overline{AB} > \overline{BC} - \overline{AC}$; $\overline{AC} > \overline{BC} - \overline{AB}$

D) Esta segunda parte del teorema es evidente cuando se trata del lado mayor, por eso solo demostraremos para los dos lados menores del triángulo.

Por la 1º parte del teorema podemos escribir: $\overline{AB} + \overline{AC} > \overline{BC}$

$\overline{AC} = \overline{AC}$

Restando m. a m. Tendremos .... $\overline{AB} > \overline{BC} - \overline{AC}$ 1º Parte de la tesis.

Analogamente $\overline{AB} + \overline{AC} > \overline{BC}$

$\overline{AB} = \overline{AB}$

Restando m. a m. Tendremos .... $\overline{AC} > \overline{BC} - \overline{AB}$ 2º Parte de la tesis.

<u>TEOREMA</u>

Si dos lados de un triángulo son respectivamente iguales a dos lados de otro triangulo y los ángulos comprendidos son desiguales, a mayor ángulo se opone mayor lado.

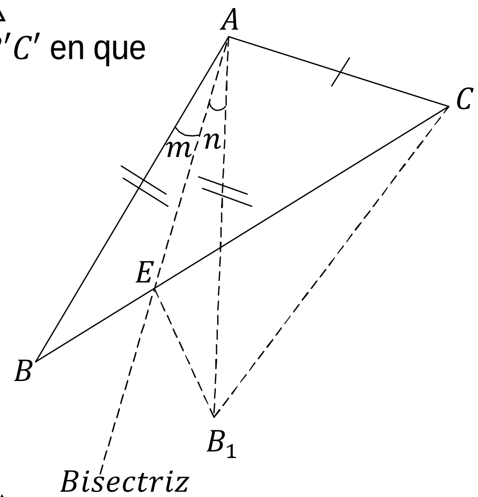
H) Sean los triángulos $\overset{\triangle}{ABC}$ y $\overset{\triangle}{A'B'C'}$ en que

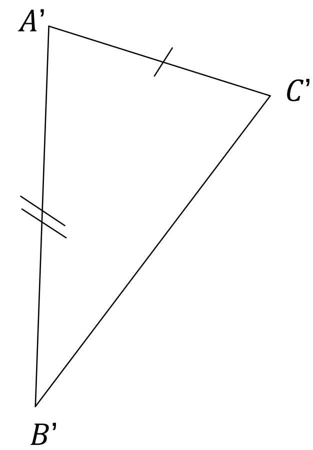
$\overline{AB} = \overline{A'B'}$

$\overline{AC} = \overline{A'C'}$

$\overset{\angle}{A} > \overset{\angle}{A'}$

T) $\boxed{\overline{BC} > \overline{B'C'}}$





D) Transportando el triángulo $\overset{\triangle}{A'B'C'}$ sobre el triángulo $\overset{\triangle}{ABC}$ de tal forma que el lado $\overline{A'C'}$ coincida con el lado $\overline{AC}$

En estas condiciones el punto B' se transforma en el punto B_1

Puesto que el $\overset{\angle}{A'} < \overset{\angle}{A}$ entonces caerá en el interior del $\overset{\angle}{BAC}$

También $\overline{CB_1} = \overline{C'B'}$

Por el punto A trazamos la bisectriz del ángulo $\overset{\angle}{BAB_1}$, determinando de esta forma el punto E.

Uniendo el punto E con B_1 tendremos formados los siguientes triángulos.

$\overset{\triangle}{BAE} = \overset{\triangle}{B_1AE}$.................................. $\left\{ \begin{array}{l} \overline{AE} = \overline{AE} \text{ ... ... Lado común} \\ \overline{AB} = \overline{AB_1} = \overline{A'B'} \text{ ... ... Por hipotesis} \\ \overset{\angle}{m} = \overset{\angle}{n} \text{ ... ... Por construcción} \\ \text{Por igualdad de triangulos dos lados y el angulo} \\ \text{comprendido iguales los triangulos seran iguales} \end{array} \right.$

Luego $\overline{BE} = \overline{EB_1}$.. (1)

Considerando el triangulo $\overset{\triangle}{EB_1C}$, podemos escribir

$\overline{EB_1} + \overline{EC} > \overline{CB_1}$ .... (2) Porque un lado de un triángulo es menor que la suma de los otros dos.

Llevando (1) en (2) tendremos

$$\overline{BE} + \overline{EC} > \overline{CB_1}$$

Es decir $\boxed{\overline{BC} > \overline{B'C'}}$ Que es la tesis

TEOREMA

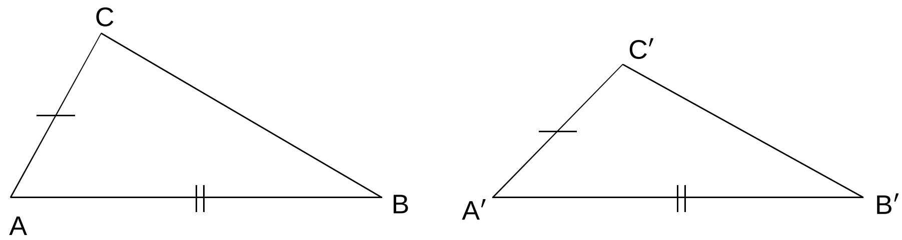
Si dos lados de un triángulo son respectivamente iguales a dos lados de otro triangulo y los terceros lados son desiguales, a mayor lado se opone mayor ángulo.

H) Sean los triángulos $\overset{\triangle}{ABC}$ y $\overset{\triangle}{A'B'C'}$ en los cuales

$\overline{AB} = \overline{A'B'}$

$\overline{AC} = \overline{A'C'}$

$\overline{CB} > \overline{C'B'}$



T) $\boxed{\overset{\angle}{A} > \overset{\angle}{A'}}$

Supongamos que $\overset{\angle}{A} \ngtr \overset{\angle}{A'}$ entonces sobrarían dos posibilidades.

$\overset{\angle}{A} = \overset{\angle}{A'}$…………………En este caso los dos triángulos serian iguales por tener dos lados y el ángulo comprendido iguales, lo cual implicaría $\overline{CB} = \overline{C'B'}$ que es contrario a la hipótesis.

$\overset{\angle}{A} < \overset{\angle}{A'}$ ……………… Esta posibilidad implicaría que $\overline{CB} < \overline{C'B'}$ porque a mayor ángulo se opone mayor lado, pero esta relación es contraria a la hipótesis.

Luego necesariamente ha de ser:

$\boxed{\overset{\angle}{A} > \overset{\angle}{A'}}$ Que es la tesis.

OBS: Esta demostración se denomina “Por El absurdo”.

Si los segmentos determinados en una transversal por tres o más rectas paralelas son iguales, también son iguales los determinados en otra transversal por las mismas rectas paralelas.

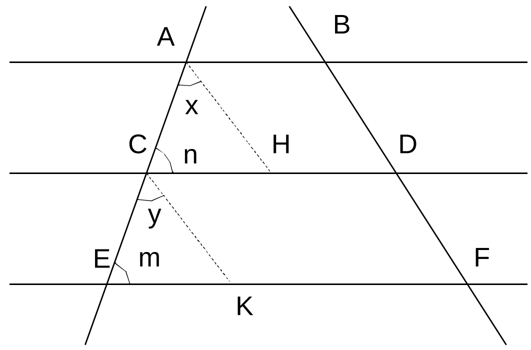
H) AB // CD // EF

AE corta a las paralelas

$\overline{AC} = \overline{CE}$

BF corta a las mismas paralelas.

T) $\overline{BD} = \overline{DF}$



D) Trazamos por dos puntos A y C rectas paralelas a BF y sean los puntos H y K las intersecciones con las //s.

En estas condiciones podemos escribir

$$\left\{\begin{array}{l}\overline{AH} = \overline{BD}\\ \overline{CK} = \overline{DF}\end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1) \quad \left\{\text{Por ser segmentos de paralelas comprendido entre paralelas.}\right.$$

También quedan determinados los triángulos

$$\overset{\triangle}{ACH} = \overset{\triangle}{CEK} \ldots\ldots\ldots \left\{\begin{array}{l}\overline{AC} = \overline{CE} \ldots\ldots\ldots \text{Por Hipotesis}\\ \overset{\angle}{m} = \overset{\angle}{n} \ldots\ldots \text{Por ser angulos correspondientes comprendidos entre paralelas}\\ \overset{\angle}{x} = \overset{\angle}{y} \ldots\ldots \text{Por ser angulos correspondientes entre paralelas.}\\ \text{Luego por igualdad de triangulos un lado y los angulos adyacentes iguales.}\end{array}\right.$$

Luego: $\overline{AH} = \overline{CK}$ .... (2)

Llevando (1) en (2) tendremos .... $\overline{BD} = \overline{DF}$.. Que es la tesis.

TEOREMA

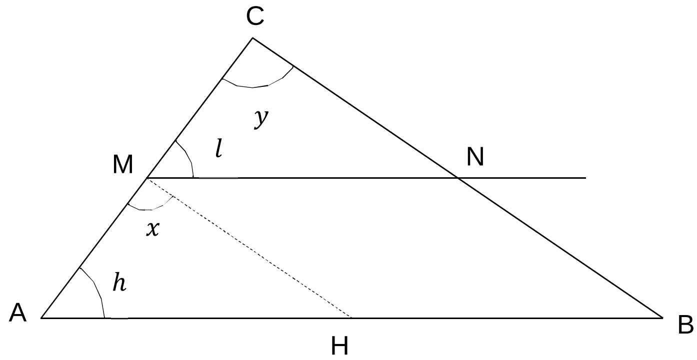
Si una recta pasa por el punto medio de un lado de un triángulo y es paralela a otro lado divide al tercer lado en dos partes iguales.

H) $\overset{\triangle}{ABC}$ triangulo cualquiera.

$\overline{AM} = \overline{MC}$

MN ∥ AB

T) $\boxed{\overline{CN} = \overline{NB}}$



D) Por el punto M trazamos una ∥ a CB determinando el punto H.

En estas condiciones quedan formados los triángulos

$\overset{\triangle}{AMH} = \overset{\triangle}{MCN}$ ....

$\overline{AM} = \overline{MC}$ ... ... Por Hipotesis

$\overset{\angle}{h} = \overset{\angle}{l}$ ... ... Por ser angulos correspondientes comprendidos entre paralelas.

$x = y$ ... ... Angulos correspondientes comprendidos entre paralelas

Por igualdad de triangulos Un lado y los angulos adyacentes a dicho lado iguales

Luego: $\overline{MH} = \overline{CN}$

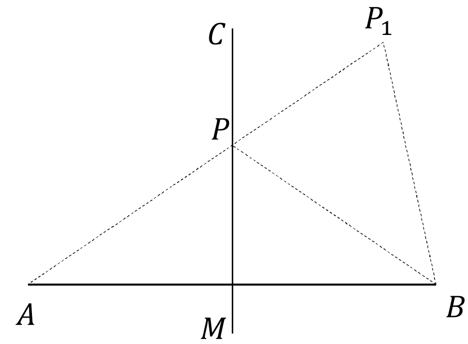
También tendremos que $\overline{MH} = \overline{NB}$..Por segmentos de paralelas comprendidos entre paralelas.

Dos cantidades iguales a una tercera son iguales entre sí.

Luego: $\boxed{\overline{CN} = \overline{NB}}$ Que es la tesis.

TEOREMA

La mediatriz de un segmento de recta es el lugar geométrico de los puntos equidistantes de los extremos del segmento.



H) CM es mediatriz de $\overline{AB}$......................... $\begin{cases} \overline{AM} = \overline{MB} \\ CM \perp AB \end{cases}$

T) CM es el lugar geométrico de todos los puntos equidistantes de A y B.

D) Para demostrar este teorema debemos demostrar primero que un punto cualquiera de CM equidista de los extremos. También debemos demostrar que un punto que no pertenece a la mediatriz no equidista de los extremos.

Sea P un punto cualquiera de la mediatriz CM.

Uniendo este punto P con los extremos A y B del segmento tendremos formados los siguientes triángulos.

$\overset{\triangle}{AMP} = \overset{\triangle}{BMP}$......................... $\begin{cases} \overline{AM} = \overline{MB} \text{ .... Por Hipotesis} \\ \overline{PM} = \overline{PM} \text{ .... lado común} \\ \text{Los triangulos son rectangulos pues } \overline{PM} \perp \overline{AB} \text{ p/Hipotesis} \\ \text{Igualdad de triangulos rectangulos dos catetos iguales.} \end{cases}$

Luego: $\overline{AP} = \overline{PB}$

Entonces podemos concluir que cualquier punto de la mediatriz equidista de los extremos del segmento.

Sea P_1 un punto arbitrario elegido por conveniencia en la prolongación de AP.

Uniendo este punto con el extremo B del segmento queda formado el triangulo $\overset{\triangle}{PP_1B}$

En este triángulo tendremos

$\overline{P_1B} < \overline{P_1P} + \overline{PB}$ .... Un lado de un triángulo es menor que la suma de los otros dos.

Pero $\overline{PB} = \overline{AP}$ ....Por la demostración anterior.

Luego $\overline{P_1B} < \overline{P_1P} + \overline{AP}$

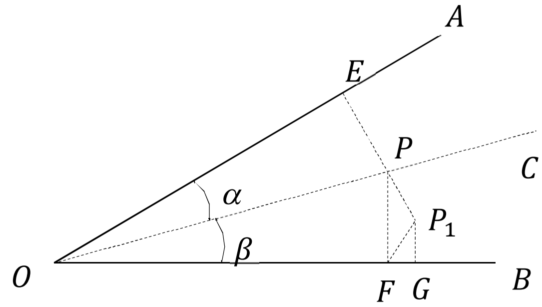
O también $\overline{P_1B} < \overline{AP_1}$

Y con esta relación demostramos que un punto fuera de la mediatriz no equidista de los extremos del segmento.

Luego $\overline{CM}$ es el lugar geométrico de los puntos equidistantes de los extremos del segmento $\overline{AB}$

TEOREMA

La bisectriz de un ángulo es el lugar geométrico de los puntos equidistantes de los lados del ángulo.



H) Sea el ángulo $\overset{\angle}{AOB}$

OC es la bisectriz del ángulo $\overset{\angle}{AOB}$

T) OC es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los lados OA y OB.

D) Para demostrar este teorema debemos demostrar que un punto cualquiera de la bisectriz equidista de los lados del ángulo.

También debemos demostrar que un punto que no pertenece a la bisectriz no equidista de dichos lados.

Sea P un punto cualquiera de la bisectriz OC

Trazamos por dicho punto las perpendiculares a los lados del ángulo, quedando determinados los puntos E y F.

Considerando los triángulos.

$\overset{\triangle}{OEP} = \overset{\triangle}{OFP}$........................

- $\overline{OP} = \overline{OP}$ … … … … … … … … … …. Lado común
- $\overset{\angle}{\alpha} = \overset{\angle}{\beta}$ … … … … … … … … … … …Por ser OC bisectriz de $\overset{\angle}{AOB}$
- Triangulos rectangulos pues $\left\{\begin{matrix} PE \perp OA \\ PF \perp OB \end{matrix}\right\}$ Por construcción
- Igualdad de triangulos rectangulos hipotenusa y un angulo agudo iguales.

Luego $\overline{PE} = \overline{PF}$

Entonces un punto cualquiera de la bisectriz equidista de los lados.

En la prolongación de $\overline{EP}$ elegimos un punto fuera de la bisectriz y sea P_1 dicho punto.

Trazamos por P_1 la $\perp$ a OB determinando el punto G y unimos el punto P_1 al punto F

De esta forma podemos escribir.

$\overline{P_1G} < \overline{P_1F}$.. (1) .....El segmento de la $\perp$ es menor que cualquier oblicua

También $\overline{P_1F} < \overline{P_1P} + \overline{PF}$ ....Un lado de un triángulo es menor que la suma de los otros dos.

Pero $\overline{PF} = \overline{PE}$..Por demostración anterior.

Luego $\overline{P_1F} < \overline{P_1P} + \overline{PE} = \overline{P_1E}$...(2)

De (1) y (2) podemos concluir que:

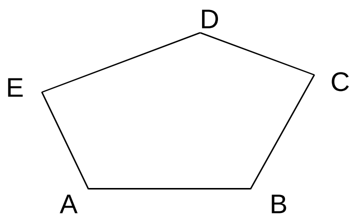
$\overline{P_1G} < \overline{P_1E}$............................ Por el carácter transitivo de las desigualdades.

De esta forma demostramos que un punto no situado en la bisectriz de un ángulo no equidista de los lados.

Luego: La bisectriz de un ángulo es el lugar geométrico de los puntos equidistantes de los lados del ángulo.

DEFINICIONES

Polígono: es la porción del plano limitada por tres o más segmentos rectilíneos que tienen dos a dos un extremo común, que se llaman vértices y a los segmentos se les llama lados.

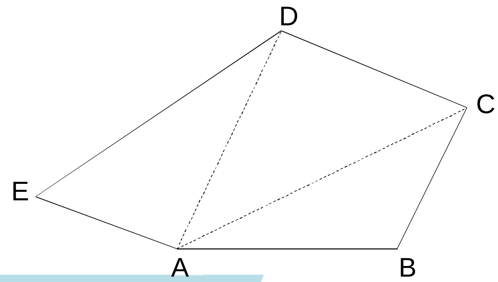


$\overline{AB}$; $\overline{BC}$; $\overline{CD}$; $\overline{DE}$; $\overline{EA}$ ………….Lados.

A , B , C , D , E …………………………Vértices del polígono.

$\angle A, \angle B, \angle C, \angle D$ y $\angle E$……………………………Ángulos internos del polígono.

Diagonal de un polígono: Se llama diagonal al segmento determinado por dos vértices no consecutivos.



$\overline{AC}$ y $\overline{AD}$ son diagonales del polígono respecto al vértice A.

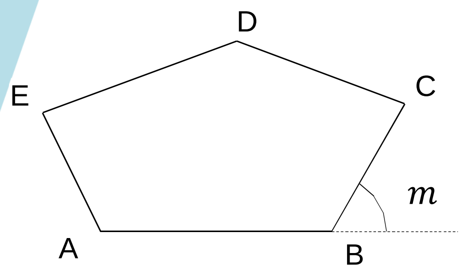
Desde un vértice se puede trazar $(n-3)$ diagonales.

Y un total de: $\dfrac{n}{2}(n-3)$ diagonales.

También: Si desde un vértice trazamos las diagonales el polígono se divide $(n-2)$ triángulos.

Angulo externo de un polígono: es el ángulo formado por la prolongación de un lado con el lado adyacente.

$\angle m$…………ángulo externo del polígono respecto al vértice B.

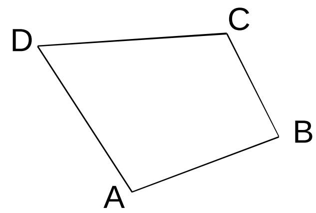


Clasificación de los polígonos según el número de lados.

Nº DE LADOS	NOMBRE DEL POLIGONO
3 lados	Triangulo
4 lados	Cuadrilátero
5 lados	Pentágono
6 lados	Hexágono
7 lados	Heptágono
8 lados	Octágono
9 lados	Eneágono
10 lados	Decágono
11 lados	Endecágono
12 lados	Dodecágono
15 lados	Pentadecágono
20 lados	Icosígono

Cuadriláteros: es el polígono de cuatro lados.

ABCD es un cuadrilátero.



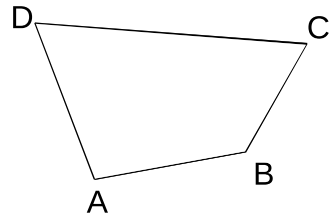
Clasificación de los cuadriláteros: Los cuadriláteros se clasifican en:

a) *Cuadrilátero común*: cuando ninguno de sus lados son paralelos, es llamado también de trapezoide.

$AB \nparallel DC$

$AD \nparallel BC$

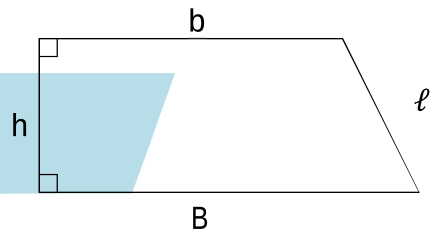
Luego ABCD es un cuadrilátero común.



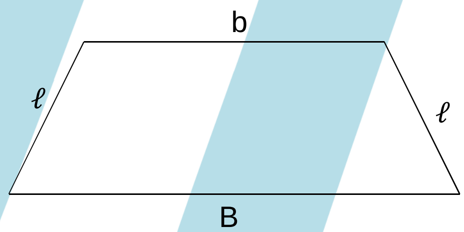
b) *Trapecios*: es un cuadrilátero que tiene dos lados paralelos

Se clasifican a su vez:

- ❖ Trapecios rectángulos: son los que tienen dos ángulos rectos.



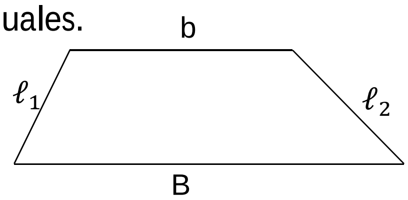
- ❖ Trapecios isósceles: cuando sus lados no paralelos son iguales.



- ❖ Trapecios escalenos: cuando sus lados no paralelos son desiguales.

$\ell_1 \neq \ell_2$

También suelen llamarse trapecio común.



Elementos de un trapecio:

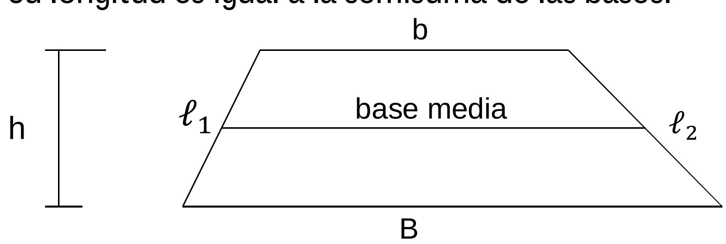
Base: son los lados paralelos del trapecio como son desiguales, una se le llama base mayor B y a la otra se lo llama base menor b.

Altura de un trapecio: es el segmento de la perpendicular común a los lados paralelos, se lo representa por h.

Lados del trapecio: son los lados no paralelos.

Base media del trapecio: es el segmento de recta que une los puntos medios de los lados no paralelos.

Su longitud es igual a la semisuma de las bases.



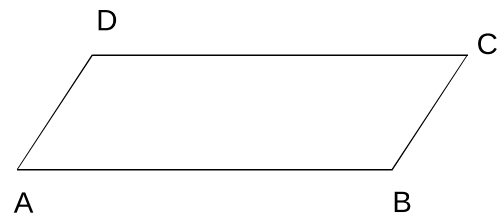
$$\boxed{\frac{B + b}{2}} = b_m$$

c) *<u>Paralelogramo</u>*: es el cuadrilátero que tiene sus lados paralelos dos a dos.

$AB \parallel CD$

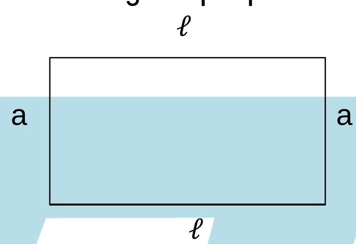
$AD \parallel BC$

ABCD es un paralelogramo común.

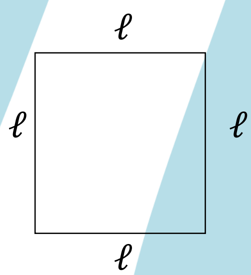


Los paralelogramos se clasifican a su vez…

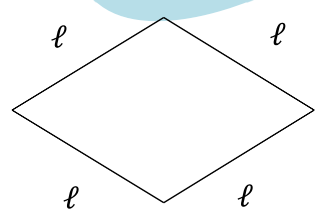
- <u>Rectángulo:</u> cuando tiene sus lados contiguos perpendiculares y desiguales.



- <u>Cuadrado:</u> cuando tienen sus lados contiguos perpendiculares, y sus cuatro lados iguales.



- <u>Rombo:</u> cuando tienen sus ángulos contiguos desiguales y sus cuatro lados iguales.

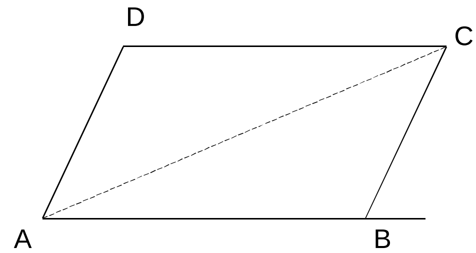


* **En todo paralelogramo, cada lado es igual a su opuesto.**

H) $\overset{\square}{ABCD}$ es un paralelogramo.

T) $\overline{AB} = \overline{DC}$

$\overline{AD} = \overline{BC}$



* **Los ángulos opuestos de un paralelogramo son iguales y los adyacentes a un mismo lado, son suplementarios.**

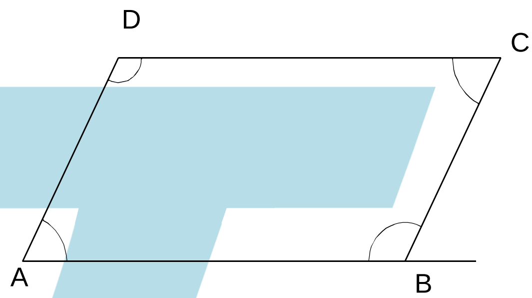
H) $\overset{\square}{ABCD}$ es un paralelogramo.

T) $\overset{\angle}{A} = \overset{\angle}{C}$

$\overset{\angle}{D} = \overset{\angle}{B}$

$\overset{\angle}{A} + \overset{\angle}{B} = 2\angle$ Rtos

$\overset{\angle}{A} + \overset{\angle}{D} = 2\angle$ Rtos.

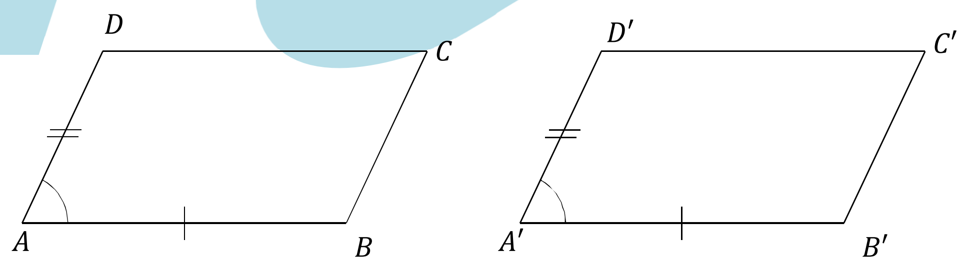


* **Si dos lados adyacentes de un paralelogramo y el ángulo comprendido son respectivamente iguales a los de otro, los dos paralelogramos son iguales.**

H) $\overline{AB} = \overline{A'B'}$

$\overline{AD} = \overline{A'D'}$

$\overset{\angle}{A} = \overset{\angle}{A'}$

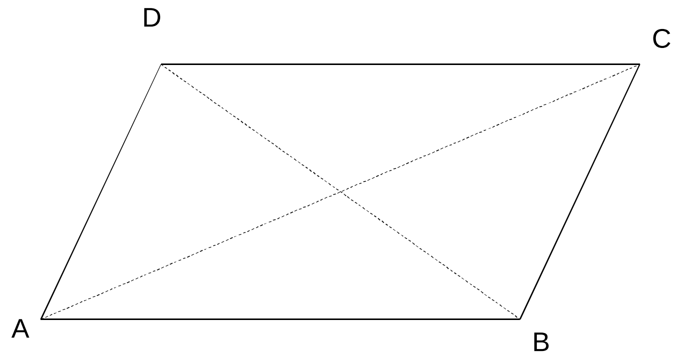


T) $\overset{\square}{ABCD} = \overset{\square}{A'B'C'D'}$

* **Los segmentos de paralelas comprendidas entre paralelas son iguales.**
* **Si cada lado de un cuadrilátero es igual a su opuesto, el cuadrilátero es un paralelogramo.**
* **Si dos lados de un cuadrilátero son iguales y paralelos, los otros dos también lo son, y por tanto el cuadrilátero es un paralelogramo.**

<u>TEOREMA RELATIVO A LAS DIAGONALES D ELOS PARALELOGRAMOS.</u>

* **Cada diagonal de un paralelogramo lo divide en dos triángulos iguales.**



H) ABCD es un paralelogramo.

$\overline{AC}$ y $\overline{DB}$ diagonales del paralelogramo.

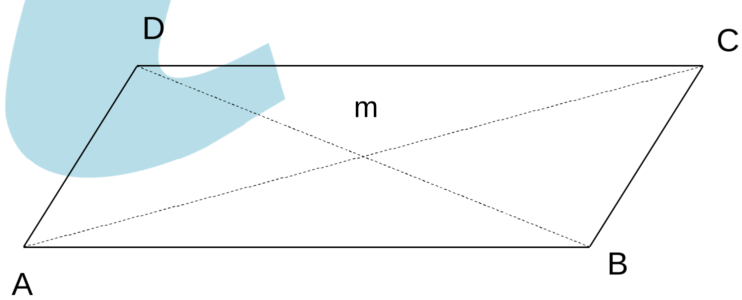
T) $\overset{\triangle}{ABC} = \overset{\triangle}{ACD}$

$\overset{\triangle}{ADB} = \overset{\triangle}{DCB}$

* **Las diagonales de un paralelogramo se dividen mutuamente en partes iguales.**

H) ABCD es un paralelogramo.

$\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ son diagonales y se cortan en el punto M.

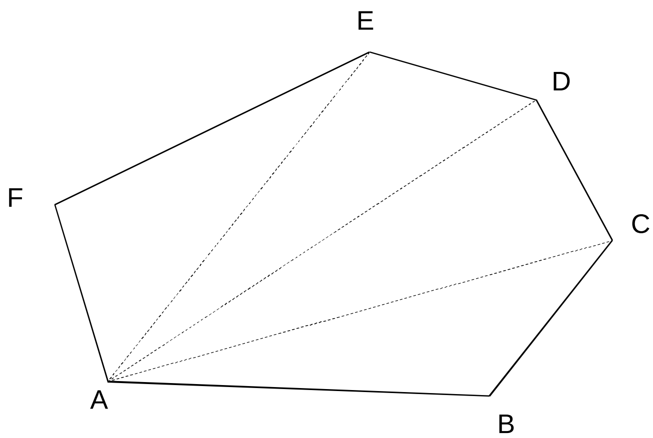


T) $\overline{AM} = \overline{MC}$

$\overline{DM} = \overline{MB}$

TEOREMA

La suma de los ángulos internos de un polígono es igual a tantas veces dos ángulos rectos como lados menos dos tenga el mismo.



H) ABCDEF es un polígono cualquiera de n lados

$\overset{\angle}{A}, \overset{\angle}{B}, \overset{\angle}{C}, \overset{\angle}{D}, \overset{\angle}{E}, \overset{\angle}{F}$ son ángulos interiores del polígono.

S (i).....Suma de los ángulos interiores del polígono

T) S (i) = $\overset{\angle}{A} + \overset{\angle}{B} + \ldots + \overset{\angle}{F}$ = 2Rtos (n – 2)

D) Si desde un vértice cualquiera, trazamos todas las diagonales que parten de ese vértice, el polígono quedara dividido en (n – 2) triángulos.

Pues a cada lado corresponde un triángulo, menos a los dos lados contiguos al vértice.

Verificamos que la suma de los ángulos internos de los (n – 2) triángulos es igual a la suma de los ángulos internos del polígono.

La suma de los ángulos internos de cada triángulo es $2\angle\, Rtos$

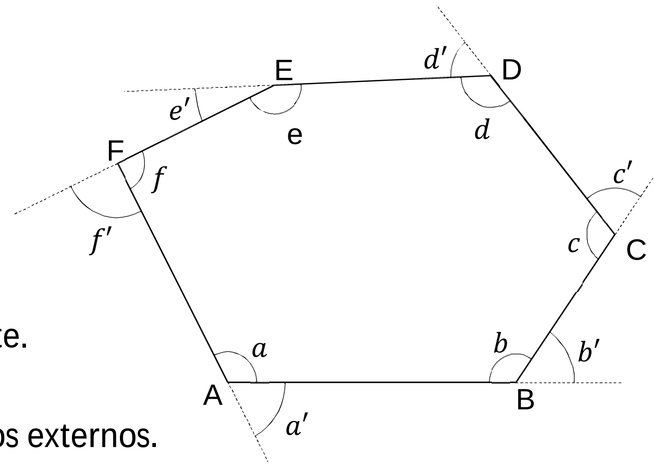
Luego: S (i) $= \overset{\angle}{A} + \overset{\angle}{B} + \ldots + \overset{\angle}{F} = 2\, Rtos(n-2)$ Que es la tesis.

<u>OBS:</u> Siendo A_i un ángulo interno de un polígono regular. $A_{(i)} = \dfrac{180(n-2)}{n}$

TEOREMA

La suma de los ángulos exteriores de un polígono es igual a cuatro ángulos rectos.

H) Sea ABCDEF un polígono cualquiera de n lados.



Sean $\angle a, \angle b, \angle c, \angle d, \angle e, \angle f$ los ángulos internos.

Sean $\angle a', \angle b', \angle c', \angle d', \angle e', \angle f'$ los ángulos externos adyacentes a los ángulos internos respectivamente.

$S(e) = \angle a' + \angle b' + \ldots + \angle f'$ ....Suma de los ángulos externos.

T) $\boxed{S(e) = 4 \angle \text{Rtos.}}$

D) En cada vértice del polígono tendremos que la suma del ángulo interno más el ángulo externo es igual a $2 \angle$ Rtos ....Por Adyacentes.

El número de vértices es igual al número de lados n.

Luego la suma de todos los ángulos internos S(i) y todos los ángulos externos S(e) será.

$$S(i) + S(e) = n\, 2\angle \text{Rtos}$$

$$S(e) = n\, 2\angle \text{Rtos} - S(i)$$ ....(1)............Transponiendo términos.

Pero $S(i) = 2 \angle \text{Rtos}\,(n-2)$...........................(2)......................... Porque la suma de los ángulos internos de un polígono es igual a $2 \angle$ Rtos (n – 2)

(2) en (1) tendremos:

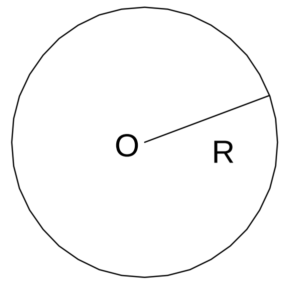
$$S(e) = n\, 2 \angle \text{Rtos} - 2 \angle \text{Rtos}\,(n-2)$$

$$S(e) = n\, 2 \angle \text{Rtos} - n\, 2 \angle \text{Rtos} + 4 \angle \text{Rtos}$$

$\boxed{S(e) = 4\angle \text{Rtos}}$ ....Que es la tesis.

<u>DEFINICIONES 4</u>

1. <u>Circunferencia:</u> es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de otro punto del mismo plano llamado centro.

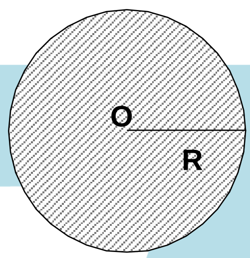


R = Radio

La longitud constante entre el centro y los puntos del lugar geométrico se llama radio R.

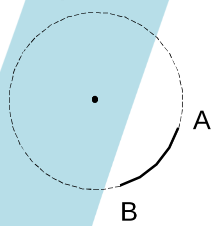
La cia es una curva cerrada.

2. <u>Centro de la cia:</u> es el punto del cual equidistan todos los puntos de la cia.
3. <u>Radio de la cia:</u> es el segmento de recta que parte del centro y termina en un punto cualquiera de la cia.
4. <u>Círculo:</u> es la porción del plano limitada por la cia. El vocablo círculo envuelve la idea de superficie y al decir círculo, nos estamos refiriendo al área limitada por la curva cia.



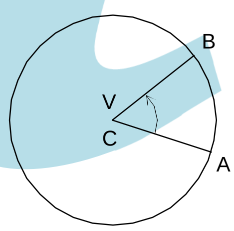
5. <u>Arco de Cia:</u> es una porción cualquiera de la cia, separada o limitada por dos puntos de ella.

ARCO $\overset{\frown}{AB}$......$\overset{\frown}{AB}$

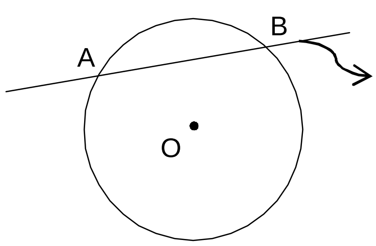


6. <u>Ángulo central:</u> es el ángulo cuyo vértice está en el centro de la cia.

$\angle ACB$ es un ángulo central.

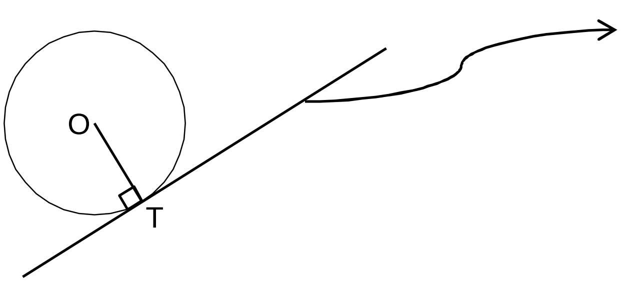


7. <u>Recta secante a una Cia:</u> es la recta que corta a la cia en dos puntos.



Recta Secante a la Cia O.

8. <u>Reta Tangente a la Cia:</u> es la recta que solo tiene un punto en común con la Cia.



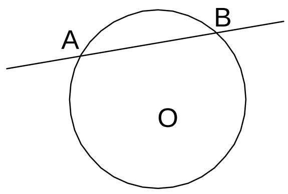
Recta Tangente a la cia O.

T.........Punto de tangencia o punto de contacto.

La tangente es $\perp$ al radio que pasa por el punto de tangencia.

9. <u>Cuerda de una Cia:</u> es el segmento de recta que une dos puntos de una cia.

O también, es el segmento de la secante comprendido entre los puntos en donde esta corta a la cia.



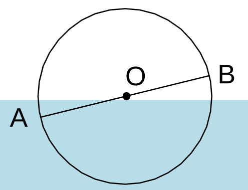
Cuerda $\overline{AB}$.......$\overline{AB}$

<u>OBS:</u> La cuerda $\overline{AB}$ subtiende el arco $\overset{\frown}{AB}$

10. <u>Diámetro de la cia:</u> es la cuerda que pasa por el centro de la cia.

Todos los diámetros de una cia son iguales y por un punto de la cia solo puede pasar un diámetro. $D = 2R$

El diámetro es la cuerda máxima.



Diámetro......... $D = \overline{AB}$

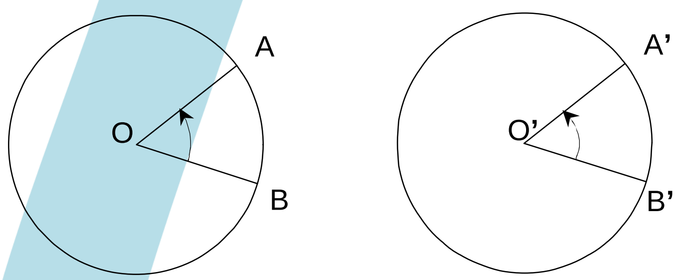
11. <u>Teoremas relativos a los ángulos centrales de extremos comunes con los arcos considerados</u>

a) **En una misma cia o en cias iguales a ángulos centrales iguales corresponden arcos iguales.**

H) $Cia\ O = Cia\ O'$

$\angle AOB = \angle A'O'B'$

T) $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{A'B'}$

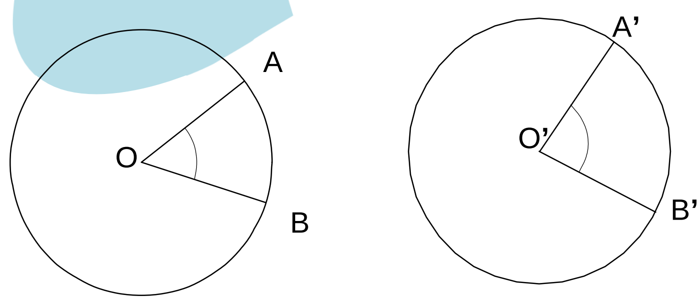


b) **En una cia o en cias iguales a mayor ángulo central corresponde mayor arco.**

H) $Cia\ O = Cia\ O'$

$\angle AOB < \angle A'O'B'$

T) $\overset{\frown}{AB} < \overset{\frown}{A'B'}$



Los teoremas recíprocos de estos dos también son verdaderos.

- A arcos iguales corresponden ángulos centrales iguales.
- A mayor arco corresponde mayor ángulo central.

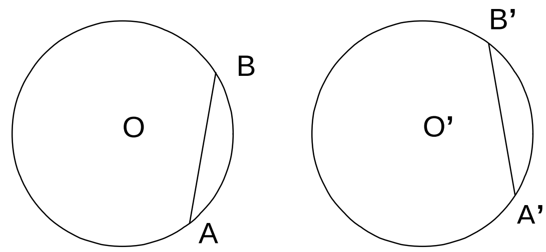
12. TEOREMA RELATIVOS A LAS CUERDAS DE EXTREMOS COMUNES CON LOS ARCOS CONSIDERADOS.

a. **En una misma cia o en cias iguales a cuerdas iguales corresponden arcos iguales.**

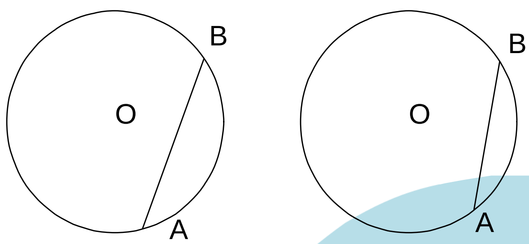
H) $Cia\ O = Cia\ O'$

$\overline{AB} = \overline{A'B'}$

T) $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{A'B'}$



b. **En una misma cia o en cias iguales, a mayor cuerda corresponde mayor arco. (siempre que el arco no exceda una semicircunferencia)**



H) $Cia\ O = Cia\ O'$

$\overline{AB} > \overline{A'B'}$

T) $\overset{\frown}{AB} > \overset{\frown}{A'B'}$ ....Siendo $\overset{\frown}{AB} < 2$ Rtas

Los teoremas recíprocos a estos también son verdaderos.

- En una misma cia o en cias iguales a arcos iguales corresponden cuerdas iguales.
- En una misma cia o en cias iguales a mayor arco corresponde mayor cuerda. (siempre que el arco no exceda de una semicircunferencia)

13. TEOREMAS RELATIVOS A LAS CUERDAS Y SUS DISTANCIAS AL CENTRO.

a) En una misma cia, si dos cuerdas son iguales equidistan del centro.
b) Si dos cuerdas son desiguales la mayor dista menos del centro que la menor.

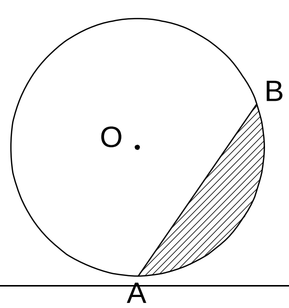
Sus teoremas recíprocos también son verdaderos.

- Si dos cuerdas equidistan del centro son iguales.
- Si dos cuerdas no equidistan del centro, la más próxima al centro es la mayor.

COROLARIOS:

- El diámetro es la mayor cuerda.
- Por tres puntos no situados en línea recta puede trazarse una cia y solo una.
- En una misma cia los arcos comprendidos entre paralelos son iguales.

14. Segmento de Circulo: Llámese segmento de círculo la parte de un círculo comprendida entre un arco y su cuerda.

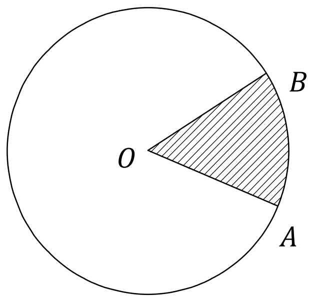


$\overline{AB}$...............Cuerda Cia O.

$\overset{\frown}{AB}$............Arco Cia O.

Segmento AB de cia................$\overset{\frown}{AB}$

15. <u>Sector de un círculo:</u> es la parte del círculo comprendida entre un arco y los radios que van a sus extremos.

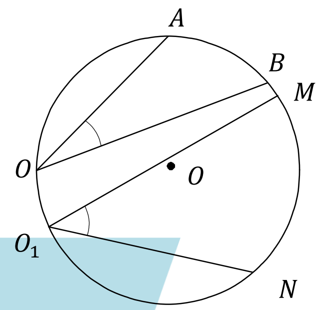


$\overset{\frown}{AB}$.......................arco Cia O.

$\overline{OA}$ y $\overline{OB}$...........Radios respectivos a sus extremos.

Sector circular $\overset{\frown}{AOB}$

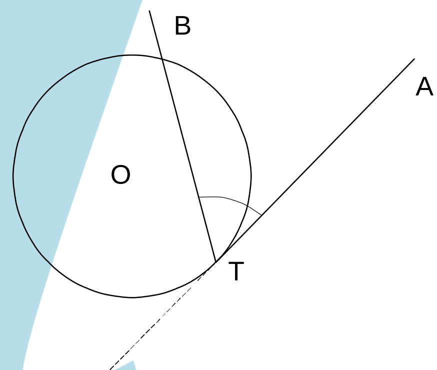
16. <u>Ángulo inscripto en una cia:</u> Un ángulo es inscripto en una cia cuando su vértice es un punto de la cia. y sus lados son cuerdas de dicha cia.



$\overset{\angle}{AOB}$ y $\overset{\angle}{MO_1N}$ son ángulos inscriptos en la cia O.

17. <u>Ángulo semi inscripto en una cia:</u>

Es un ángulo cuyo vértice es un punto de la cia y siendo que uno de sus lados es tangente y el otro lado secante a la cia.

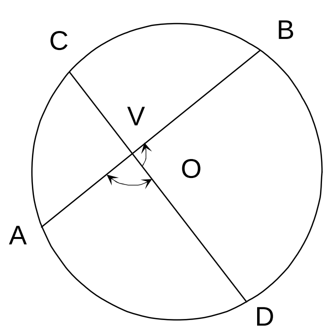


TA...............Tangente Cia O.

TB..............Secante Cia O.

$\overset{\angle}{ATB}$........... ángulo semi inscripto a Cia O.

18. <u>Ángulo interior a un círculo:</u> Un ángulo es interior a un círculo cuando su vértice es un punto del círculo, sin ser el centro de la cia.



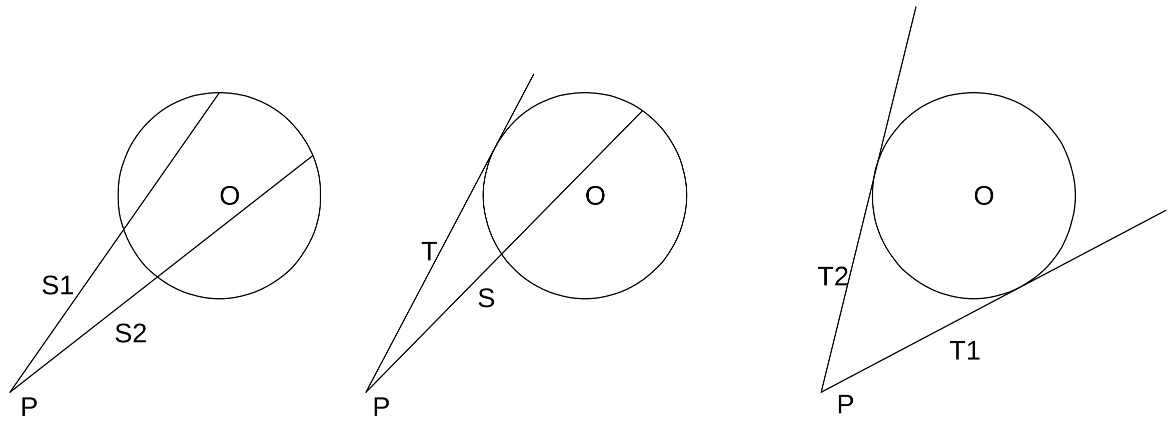
$\overset{\angle}{CVB}$; $\overset{\angle}{BVD}$; $\overset{\angle}{DVA}$ y $\overset{\angle}{AVC}$ son ángulos internos del circulo O.

<u>OBS:</u> Cuando el vértice V coincide con el centro se llama ángulo central.

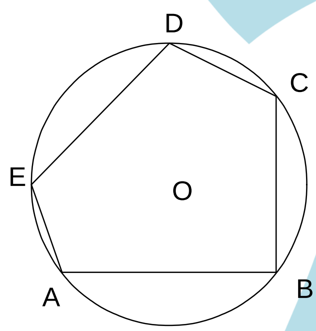
19. <u>Ángulo exterior a una cia:</u> Es el ángulo cuyo vértice es un punto exterior al círculo.

Sus lados podrán ser:

- Dos secantes.
- Una tangente y una secante.
- Dos tangentes.



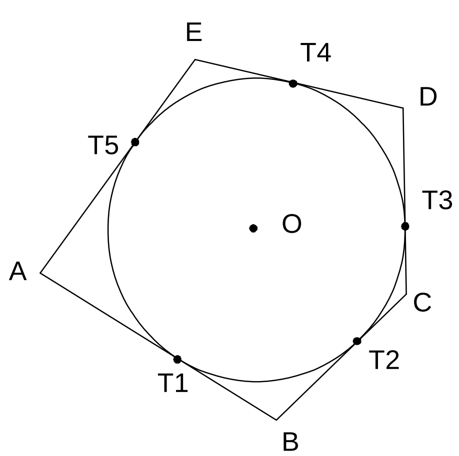
20. <u>Polígono inscripto a una cia:</u> Un polígono es inscripto a una cia cuando todos sus lados son cuerdas de dicha cia.



Polígono $ABCDE$ está inscripto en la cia O.

También podemos decir que un polígono está inscripto en una cia cuando todos sus vértices son puntos de la cia.

21. <u>Polígonos circunscripto a una cia:</u> un polígono es circunscripto a una cia cuando todos sus lados son tangentes a la cia.



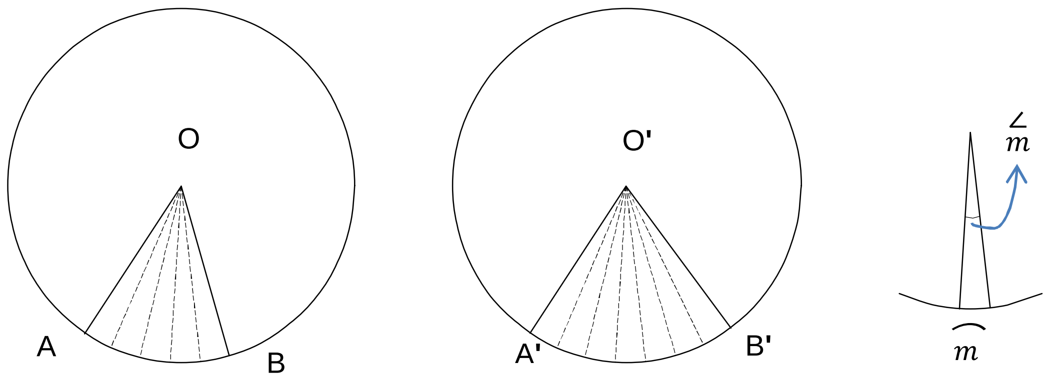
$ABCDE$ es un polígono circunscripto a la cia O

<u>OBS:</u> En este caso podríamos también decir que la cia está inscripta al polígono

En el caso anterior podríamos decir que la cia está circunscripta al polígono.

22. TEOREMAS RELATIVOS A LAS MEDIDAS DEL ÁNGULO CENTRAL.

Teorema 1: En un mismo circulo o en círculos iguales, dos ángulos centrales son entre sí como los arcos que los subtienden.



H) $Cia\ O = Cia\ O'$

$\overset{\frown}{AB}$ subtiende el ángulo central $\overset{\angle}{AOB}$

$\overset{\frown}{A'B'}$ subtiende el ángulo central $\overset{\angle}{A'O'B'}$

T) $\dfrac{\overset{\angle}{AOB}}{\overset{\angle}{A'O'B'}} = \dfrac{\overset{\frown}{AB}}{\overset{\frown}{A'B'}}$

D) Escojamos una medida de un arco $\overset{\frown}{m}$ que este contenido un número exacto de veces en el arco $\overset{\frown}{AB}$ como también en el arco $\overset{\frown}{A'B'}$

$\overset{\frown}{m}$ está contenida en $\overset{\frown}{AB}$ "a" veces…………………… $\overset{\frown}{AB}$ = a. $\overset{\frown}{m}$

$\overset{\frown}{m}$ está contenida en $\overset{\frown}{A'B'}$ "b" veces…………………… $\overset{\frown}{A'B'}$ = b. $\overset{\frown}{m}$

Luego: …………………… $\dfrac{\overset{\frown}{AB}}{\overset{\frown}{A'B'}} = \dfrac{a\ .\overset{\frown}{m}}{b\ .\overset{\frown}{m}} = \dfrac{a}{b}$ ………………………………………(1)

Trazando los radios respectivos a los puntos de división, los ángulos centrales también serán.

$\left.\begin{array}{l} \overset{\angle}{AOB} = a.\overset{\angle}{m} \\ \overset{\angle}{A'O'B'} = b.\overset{\angle}{m} \end{array}\right\}$ … … … … Luego … … … . $\dfrac{\overset{\angle}{AOB}}{\overset{\angle}{A'O'B'}} = \dfrac{a.\overset{\angle}{m}}{b.\overset{\angle}{m}} = \dfrac{a}{b}$………………………(2)

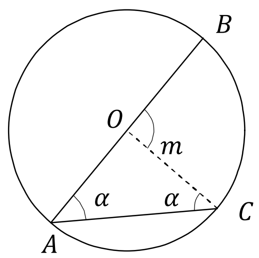
De (1) y (2) tendremos:……………….. $\dfrac{\overset{\angle}{AOB}}{\overset{\angle}{A'O'B'}} = \dfrac{\overset{\frown}{AB}}{\overset{\frown}{A'B'}}$ …………………Que es la tesis.

Corolario 2: La amplitud del ángulo central es la misma que la de su arco correspondiente, toda vez que haya correspondencia entre el ángulo unidad y el arco unidad.

23. TEOREMAS RELATIVOS A LAS MEDIDAS DEL ÁNGULO INSCRIPTO.

TEOREMA: **Todo ángulo inscripto tiene por medida la mitad del arco (ángulo central) comprendido entre sus lados.**

a) **Cuando uno de los lados del ángulo pasa por el centro de la Cia.**

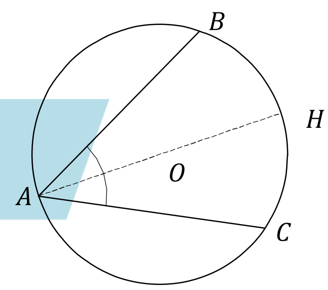


H) $\overset{\angle}{BAC}$……….inscripto en Cia

AB…………Pasa por centro Cia.

T) $\overset{\angle}{BAC} = \dfrac{1}{2}\,\overset{\angle}{BOC} = \dfrac{1}{2}\overset{\frown}{BC}$

b) **Ningún lado del ángulo pasa por el centro de la cia.**

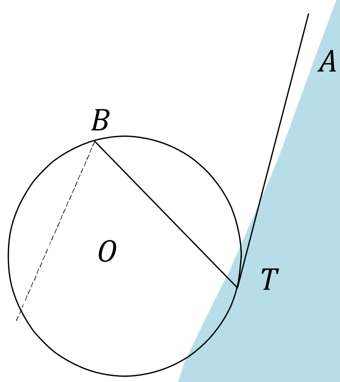


H) $\overset{\angle}{BAC}$…………inscripto en Cia.

Sus lados no pasan por el centro de la Cia.

T) $\overset{\angle}{BAC} = \dfrac{1}{2}\,\overset{\frown}{BC}$

c) Cuando uno de sus lados es tangente y el otro secante a la cia(Ángulo semi inscripto)



H) $\overset{\angle}{ATB}$………………inscripto en Cia O.

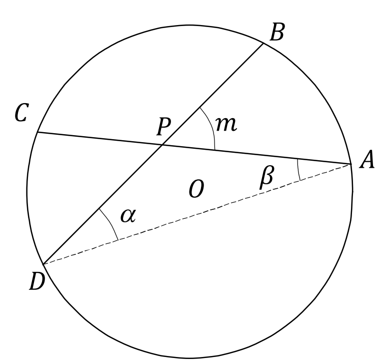
AT………………Tangente a Cia O.

BT…………………Secante a Cia O.

T) $\overset{\angle}{ATB} = \dfrac{1}{2}\,\overset{\frown}{BT}$

24. TEOREMA RELATIVO A LA MEDIDA DEL ÁNGULO DETERMINADO POR DOS RECTAS QUE PASAN POR UN MISMO PUNTO INTERIOR AL CIRCULO.

Teorema: El ángulo formado por dos cuerdas que se cortan dentro de un círculo tiene por medida la semi suma de los arcos comprendidos entre sus lados.



H) $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ son cuerdas de la cia que se cortan en un punto interior al círculo.

T) $\overset{\angle}{APB} = \dfrac{1}{2}\left(\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{CD}\right)$

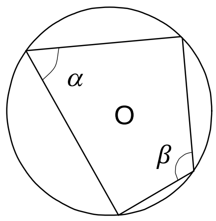
OBS: Para demostrar este teorema es solo unir los puntos A con D.

$\overset{\angle}{APB} = \overset{\angle}{\alpha} + \overset{\angle}{\beta}$ …………….Por ser ángulo externo al triangulo $\overset{\Delta}{APD}$

α y β son ángulos inscriptos en la cia.

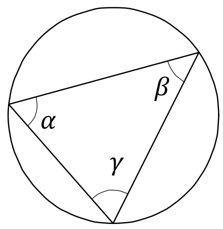
ANEXO: Consecuencias de las propiedades de un ángulo inscripto.

a) En todo cuadrilátero inscripto en una cia cada dos ángulos opuestos son suplementarios.



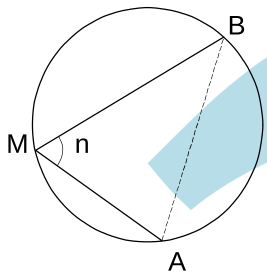
$\alpha + \beta = 180°$

b) La suma de los ángulos internos de un triángulo es igual 2 Rtos.



$\alpha + \beta + \gamma = 180°$

c) Todo ángulo inscripto en un arco mayor que una semicircunferencia será agudo.

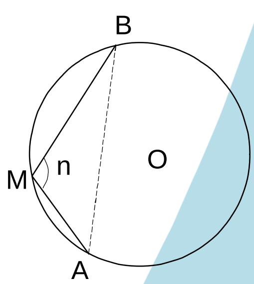


Ángulo $\overset{\angle}{n}$ está inscripto en el arco mayor que 2 Rtos.

$\overset{\angle}{n}$ Inscripto en $\overset{\frown}{AMB} > 2 \angle\ Rtos$

$\Longrightarrow$ $\overset{\angle}{n}$ .... Ángulo Agudo.

d) Todo ángulo inscripto en un arco menor que una semicircunferencia será un ángulo obtuso.

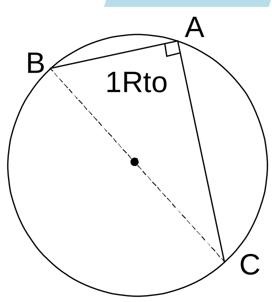


$\overset{\angle}{n}$................inscripto en el arco $\overset{\frown}{AMB}$

$\overset{\frown}{AMB} < 2 \angle\ Rtos$

$\Longrightarrow$ $\overset{\angle}{n}$ ....Ángulo obtuso.

e) Todo ángulo inscripto en un arco igual a una semicircunferencia será recto.



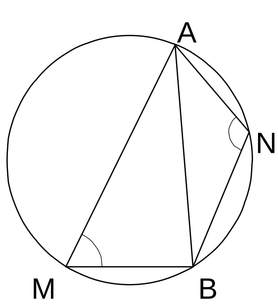
$\overset{\angle}{A}$...............Inscripto en $\overset{\frown}{BAC}$

$\overset{\frown}{BAC} = 2 \angle\ Rto$

$\overset{\angle}{A} = 1 \angle\ Rto = 90°$

OBS: Este corolario es muy importante y tiene muchas aplicaciones para resolución de problemas.

f) Dos ángulos $\overset{\angle}{M}$ y $\overset{\angle}{N}$ inscriptos, en cada arco de los que determinan una cuerda $\overline{AB}$ son suplementarios.

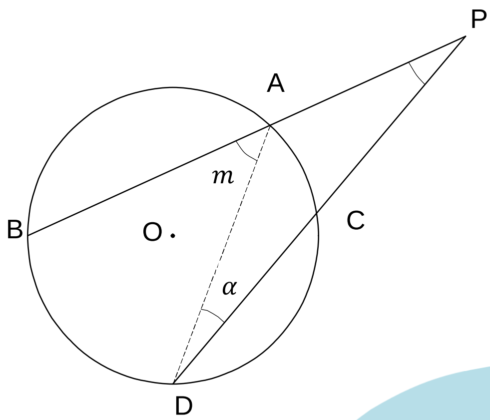


$\overset{\angle}{M} + \overset{\angle}{N} = 2Rtos.$

25. TEOREMAS RELATIVOS A LA MEDIDA DEL ÁNGULO DETERMINADO POR DOS RECTAS QUE PASAN POR UN MISMO PUNTO EXTERIOR AL CIRCULO.

Teorema: **Si desde un punto exterior a una cia, trazamos dos rectas que intersectan la cia. El ángulo agudo formado por dichas rectas es igual a la semidiferencia de los arcos que intersectan en la cia.**

1º CASO: **Las dos rectas son secantes.**



H) P........................Punto exterior Cia.

$\overline{PB}$ y $\overline{PD}$ Secantes.

T) $\angle APC = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{BD} - \overset{\frown}{AC})$

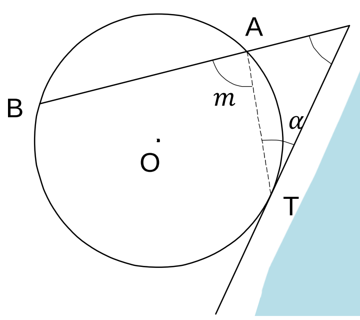
OBS: Para demostrar hacemos

$\angle m = \angle APC + \angle \alpha$..................Ángulo externo al triangulo.

Luego: $\angle APC = \angle m - \angle \alpha$

$\angle m$ y $\angle \alpha$..ángulos inscriptos en la Cia.

2º CASO: **Una recta secante y otra tangente**



H) P.......................................Punto exterior a cia

$\overline{PB}$....................................Secante Cia O.

$\overline{PT}$....................................Tangente Cia O.

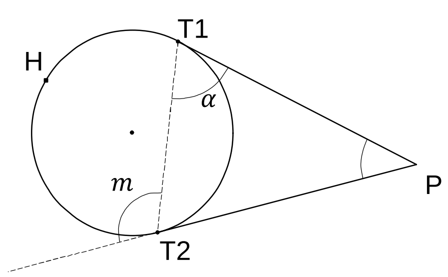
OBS: La demostración es análoga a la anterior.

$\angle m = \angle APT + \angle \alpha$...Ángulo externo $\triangle$

$\angle APT = \angle m - \angle \alpha$

$\angle m$ y $\angle \alpha$...ángulos inscriptos en Cia O.

3º CASO: **Las dos rectas son tangentes a la Cia.**



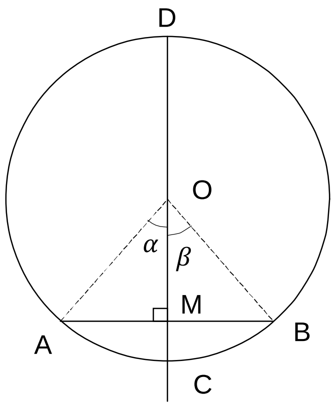
H) P................Punto exterior Cia.

PT_1 y PT_2............Tangente Cia.

T) $\angle T_1PT_2 = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{T_1HT_2} - \overset{\frown}{T_1T_2})$

OBS: La demostración es análoga a los anteriores.

TEOREMA: toda recta que pasa por el centro de una cia y es perpendicular a una cuerda, divide a la misma y a los arcos subtendidos en partes iguales.



H) Recta DC pasa por el centro de la Cia O.

AB...........Cuerda de la cia

$\overline{DC} \perp \overline{AB}$

T) $\overline{AM} = \overline{MB}$

$\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{CB}$

D) Uniendo el punto O con los extremos de la cuerda $\overline{AB}$ tendremos los siguientes triángulos.

$$\overset{\triangle}{OMA} = \overset{\triangle}{OMB} \ldots\ldots\ldots \left\{ \begin{array}{l} \overline{OA} = \overline{OB} \ldots\ldots\ldots..Radios\ de\ la\ cia\ O \\ \overline{OM} = \overline{OM} \ldots\ldots\ldots..Lado\ común. \\ Triangulos\ rectangulos\ pues\ \overline{DC} \perp \overline{AB} \\ por\ hipotesis. \\ Igualdad\ de\ triangulos\ rectangulos: \\ hipotenusa\ y\ catetos\ iguales\ . \end{array} \right.$$

Luego:................................. $\left\{ \begin{array}{c} \overline{AM} = \overline{MB} \\ \overset{\angle}{\alpha} = \overset{\angle}{\beta} \end{array} \right\}$.........................1º Parte de la tesis.

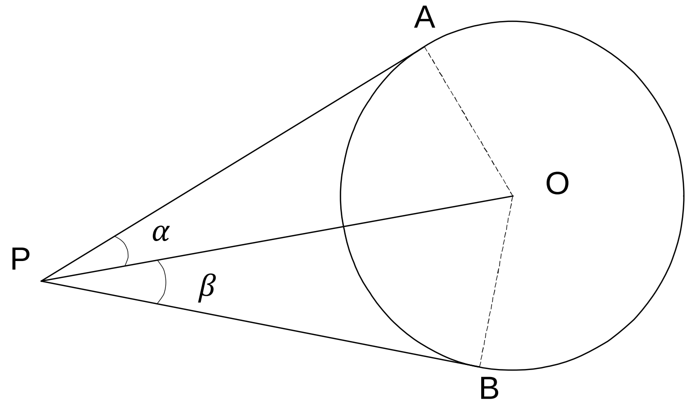
Si los ángulos centrales $\overset{\angle}{\alpha}$ y $\overset{\angle}{\beta}$ son iguales los arcos que subtienden también lo serán.

Luego: $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{CB}$ .... 2º Parte de la tesis.

TEOREMA: **Si por un punto exterior a un círculo se trazan dos rectas tangentes a su circunferencia se verifica:**

a) Dichas rectas forman ángulos iguales con la determinada por el punto dado y el centro de la cia.

b) Los segmentos de las tangentes de extremos en el punto dado y en los de tangencia, son iguales.



H) P es un punto exterior a la cia O.

PA y PB son tangentes a la cia en los puntos A y B respectivamente.

T) a) $\overset{\angle}{\alpha} = \overset{\angle}{\beta}$

b) $\overline{PA} = \overline{PB}$

D) Trazando los radios $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$

Tendremos.............................$\left\{ \begin{matrix} \overline{OA} & \perp & \overline{PA} \\ \overline{OB} & \perp & \overline{PB} \end{matrix} \right\}$..................El radio que pasa por el punto de tangencia es $\perp$ a la tangente.

Considerando los triángulos rectángulos.

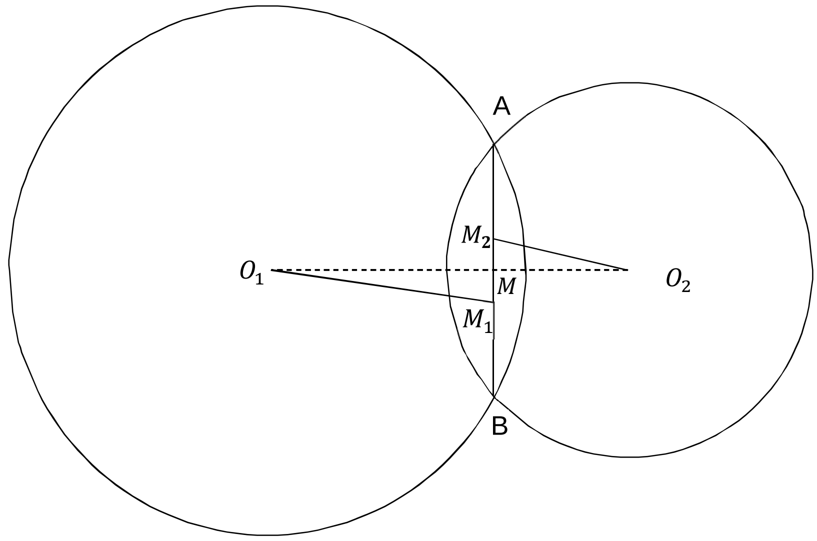
$\overset{\triangle}{OAP} = \overset{\triangle}{OBP}$................................$\left\{ \begin{array}{l} \overline{OP} = \overline{OP} \ldots\ldots\ldots\ldots.. \text{Lado común.} \\ \overline{OA} = \overline{OB} \ldots\ldots\ldots\ldots. \text{Por radios de una misma Cia.} \\ \text{Igualdad de triangulos rectangulos:} \\ \text{hipotenusa y catetos iguales.} \end{array} \right.$

Luego podemos escribir:

$\overset{\angle}{\alpha} = \overset{\angle}{\beta}$ ....Que es la tesis a)

$\overline{PA} = \overline{PB}$ ....Que es la tesis b)

TEOREMA: La recta determinada por los centros de dos circunferencias secantes es la mediatriz de la cuerda común.



H) Cias O_1 y O_2 son secantes y se cortan en los puntos A y B.

$\overline{AB}$ cuerda común a ambas cias.

O_1O_2 rectas determinadas por los centros de las cias.

T) $\overline{O_1O_2} \perp \overline{AB}$ .... $\overline{O_1O_2}$ es la mediatriz de $\overline{AB}$.
$\overline{AM} = \overline{MB}$

D) Supongamos que $\overline{O_1O_2}$ no sea la mediatriz del segmento $\overline{AB}$.

Consideremos primero la Cia O_1

Trazamos por O_1 una $\perp$ $\overline{AB}$ y sea O_1M_1 dicha $\perp$

En estas condiciones aplicamos el teorema: “toda recta que pasa por el centro de una cia y es perpendicular a una cuerda, divide a la misma y a los arcos subtendidos en dos partes iguales”

Luego tendremos: $\overline{AM_1} = \overline{M_1B}$ y O_1M_1 es la mediatriz del segmento $\overline{AB}$.

Consideremos ahora la cia O_2 y trazamos la $\perp$ al segmento $\overline{AB}$ y digamos que el punto donde corta al segmento $\overline{AB}$ sea el punto M_2.

Aplicando el mismo teorema anterior tendremos.

$\overline{AM_2} = \overline{M_2B}$.........................y O_2M_2....................Será mediatriz de $\overline{AB}$

De esta forma podemos afirmar que el punto M_1 coincide con el punto M_2 , pues un mismo segmento $\overline{AB}$ no puede tener dos puntos medios y mucho menos dos mediatrices.

Es decir O_1M_1 y O_2M_2 coinciden en M y por tanto O_1O_2 es la mediatriz de $\overline{AB}$.

DEFINICIONES 5

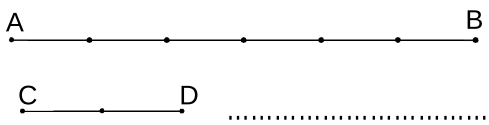
1. **Medida de un segmento.**

La medida de un segmento rectilíneo es el número que expresa la relación entre dicho segmento y otro que se toma por unidad de medida.

Ejemplo: El sistema métrico decimal con sus múltiplos y submúltiplos.

2. **Razón de dos segmentos**.

Se llama razón de dos segmentos a la relación (o cociente) que existe entre sus medidas cuando están referidos a la misma unidad.

Ej.: 

$\Longrightarrow$ $\overline{AB} = 6\text{m}$

…………………………….. $\Longrightarrow$ $\overline{CD} = 2m$

$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{6m}{2m} = \frac{3}{1} = 3$……………….Entonces decimos que la relación entre $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ es 3.

Si queremos la relación o razón que existe entre $\overline{CD}$ y $\overline{AB}$

$\frac{\overline{CD}}{\overline{AB}} = \frac{2m}{6m} = \frac{1}{3}$……………..La razón entre $\overline{CD}$ y $\overline{AB}$ será $\frac{1}{3}$

3. **Segmentos proporcionales.**

Dos segmentos rectilíneos a y b son proporcionales a otros dos c y d cuando la razón o relación entre los dos primeros es igual a la razón entre los dos últimos.

Es decir: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ $\quad a : b :: c : d$

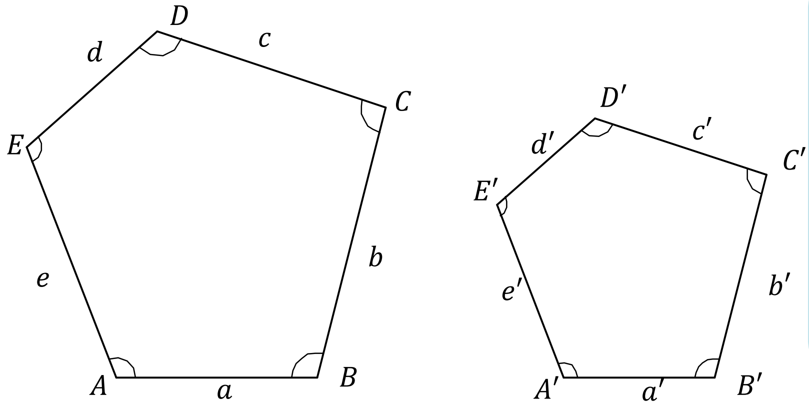
Cualquiera de los segmentos a, b, c y d se llaman cuarta proporcional.

❖ En los casos en que el 2º y 3º termino son iguales tenemos una proporción continua y dicho termino repetido se llama media proporcional y cada uno de los otros se llaman tercera proporcional.

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{d} \Longrightarrow x^2 = a.d \Longrightarrow x = \sqrt{a.d}$$

4. **Polígonos semejantes.**

Polígonos semejantes son los polígonos que tienen sus ángulos respectivamente iguales y los lados homólogos proporcionales.



$\overset{\angle}{A} = \overset{\angle}{A'}$
$\overset{\angle}{B} = \overset{\angle}{B'}$
$\overset{\angle}{C} = \overset{\angle}{C'}$
$\overset{\angle}{D} = \overset{\angle}{D'}$
$\overset{\angle}{E} = \overset{\angle}{E'}$

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{d}{d'} = \frac{e}{e'}$$

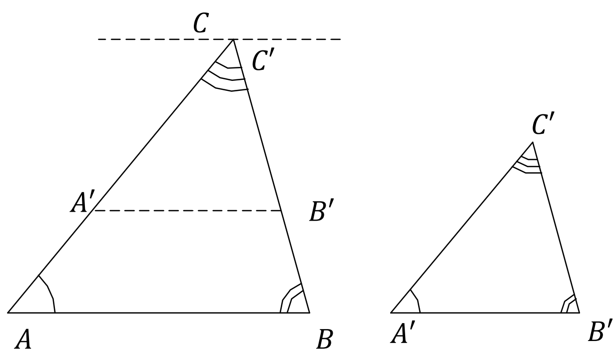
5. **Razón de semejanza de dos polígonos semejantes.**

Es la relación (o cociente) que existe entre las dimensiones de los lados homólogos del polígono.

TEOREMAS RELATIVOS A LOS CASOS DE SEMEJANZAS DE TRIANGULOS:

OBS: Análogamente a la definición de polígonos semejantes decimos que dos triángulos son semejantes cuando tienen sus ángulos respectivamente iguales y sus lados homólogos proporcionales entre sí.

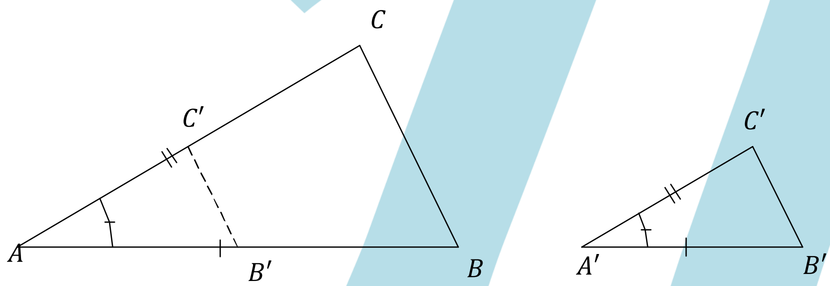
a) **Dos triángulos son semejantes si tienen sus ángulos respectivamente iguales.**



H) $\left.\begin{array}{l} \overset{\angle}{A} = \overset{\angle}{A'}\ldots.. \\ \overset{\angle}{B} = \overset{\angle}{B'}\ldots.. \\ \overset{\angle}{C} = \overset{\angle}{C'}\ldots.. \end{array}\right\}$ Luego $\left\{\begin{array}{l} \overset{\Delta}{ABC} \text{ semejante } \overset{\Delta}{A'B'C'} \\ \overset{\Delta}{ABC} - S - \overset{\Delta}{A'B'C'} \end{array}\right.$

T) $$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}$$

b) **Dos triángulos son semejantes si tienen dos lados respectivamente proporcionales y el ángulo comprendido igual.**



H) $$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}$$

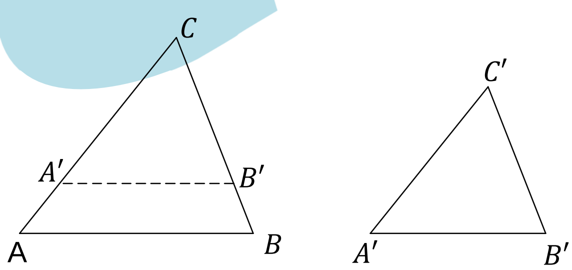
$$\overset{\angle}{A} = \overset{\angle}{A'}$$

T) $$\overset{\Delta}{ABC} - S - \overset{\Delta}{A'B'C'}$$

c) **Dos triángulos son semejantes si tienen sus tres lados proporcionales.**

H) $$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{C'D'}}$$

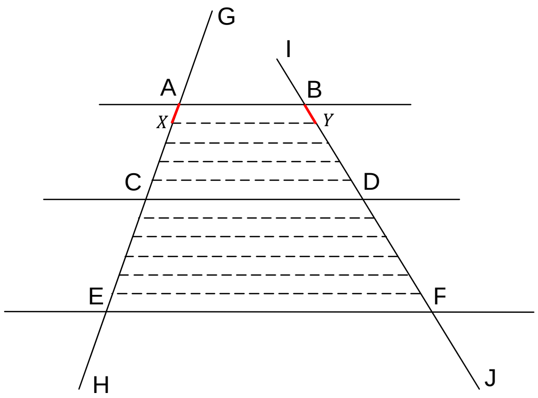
T) $$\overset{\Delta}{ABC} - S - \overset{\Delta}{A'B'C'}$$



TEOREMA DERIVADOS DE LOS TRES CASOS DE SEMEJANZA DE TRIANGULOS.

1) Dos triángulos son semejantes si tienen dos de sus ángulos iguales.
2) Dos triángulos rectángulos son semejantes si tienen respectivamente iguales un ángulo agudo.
3) Dos triángulos isósceles son semejantes si tienen un ángulo igual.
4) Dos triángulos equiláteros son semejantes.
5) Dos triángulos son semejantes si tienen sus lados respectivamente paralelos o perpendiculares.
6) Dos triángulos semejantes tienen sus alturas homologas proporcionales a algunos de los lados homólogos de los triángulos.

TEOREMA: los segmentos determinados en dos rectas transversales por tres o más rectas paralelas son proporcionales.



H) $AB \mathbin{/\!/} CD \mathbin{/\!/} EF$

GH y IJ son rectas cualquiera que cortan a las paralelas.

T) $\frac{\overline{AC}}{\overline{CE}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{DF}}$

D) Para demostrar este teorema elegimos en una de las rectas un segmento $\overline{AX}$ de tal forma que este contenido un número exacto de veces en los segmentos $\overline{AC}$ y $\overline{CE}$ y digamos que sean m y n veces respectivamente.

Luego podemos escribir: $\begin{cases} \overline{AC} = \overline{AX}\,.m \\ \overline{CE} = \overline{AX}\,.n \end{cases}$

Formando la razón entre dos segmentos tendremos:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{CE}} = \frac{\overline{AX}\,.m}{\overline{AX}\,.n} = \frac{m}{n} \text{ ....(1)}$$

Tracemos a continuación por los puntos de división rectas paralelas a $\overline{AB}$.

Estas rectas dividirán los segmentos $\overline{BD}$ y $\overline{DF}$ en el mismo número de veces de los segmentos $\overline{AC}$ y $\overline{CE}$ respectivamente.

La medida de los nuevos segmentos $\overline{BY}$ serán diferentes pero el número de veces m y n se repetirán.

Luego: $\begin{cases} \overline{BD} = \overline{BY}\,.m \\ \overline{DF} = \overline{BY}\,.n \end{cases}$

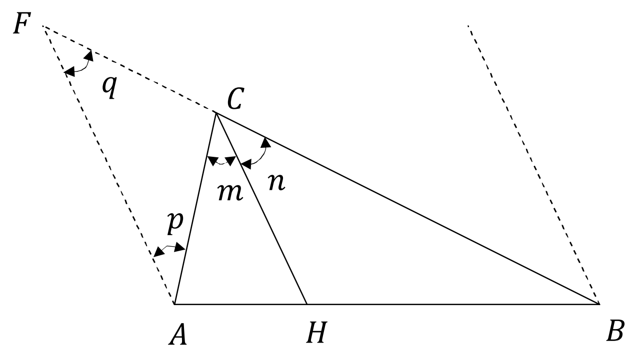
Formando razón entre estos segmentos tendremos:

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DF}} = \frac{\overline{BY}\,.m}{\overline{BY}\,.n} = \frac{m}{n} \text{ .... (2)}$$

Los segundos miembros de (1) y (2) son iguales

Luego: $\frac{\overline{AC}}{\overline{CE}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{DF}}$ ....Que es la tesis.

TEOREMA: La bisectriz de un ángulo de un triángulo divide al lado opuesto en segmentos proporcionales a los otros dos lados.



H) $\overset{\triangle}{ABC}$ es un triángulo cualquiera

$\overline{CH}$ Bisectriz del ángulo $\overset{\angle}{C}$

T) $\boxed{\dfrac{\overline{AH}}{\overline{HB}} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{CB}}}$

D) Trazamos por el vértice A una recta paralela a la bisectriz $\overline{CH}$ y prolongamos el lado $\overline{BC}$ hasta intersectar a dicha paralela en el punto F.

Trazamos también por el vértice B una recta paralela a la bisectriz $\overline{CH}$.

Entonces podemos escribir.

$\dfrac{\overline{AH}}{\overline{HB}} = \dfrac{\overline{FC}}{\overline{CB}}$ ....(1) ....Por ser segmentos de transversales comprendidos entre paralelas.

Por otra parte tenemos: ....
$$\begin{cases} \overset{\angle}{m} = \overset{\angle}{p} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{Ángulos alternos internos comprendidos entre paralelas.} \\ \overset{\angle}{n} = \overset{\angle}{q} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{Ángulos correspondientes comprendidos entre paralelas.} \end{cases}$$

Pero.......................................$\overset{\angle}{m} = \overset{\angle}{n}$.......................................Por ser $\overline{CH}$ bisectriz $\overset{\angle}{C}$.

Luego.....................................$\overset{\angle}{p} = \overset{\angle}{q}$ ....Carácter transitivo de las igualdades.

En consecuencia el triangulo $\overset{\triangle}{FCA}$ es ISOSCELES

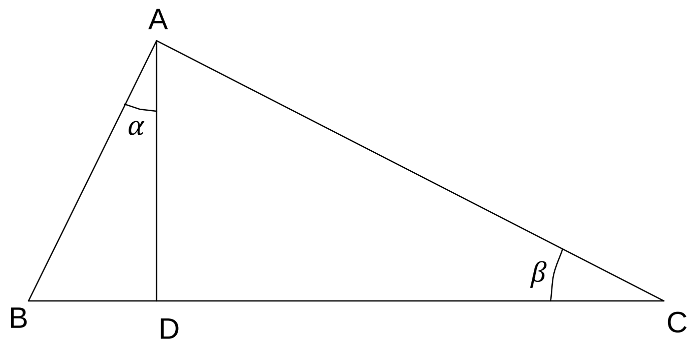
es decir $\overline{FC} = \overline{AC}$ .... (2)

Llevando (2) en (1) tendremos:

$\boxed{\dfrac{\overline{AH}}{\overline{HB}} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{CB}}}$ ....Que es la tesis.

<u>TEOREMA:</u> **Si del vértice del ángulo recto de un triángulo rectángulo se traza una recta perpendicular a la hipotenusa, se verifica:**

a) **Los dos triángulos determinados son semejantes entre si y al dado.**



H) $\overset{\triangle}{ABC}$ triangulo rectángulo en $\overset{\angle}{A} = 1\angle\, Rto.$

$AD \perp BC$

T) $\overset{\triangle}{ADB} - S - \overset{\triangle}{ADC} - S - \overset{\triangle}{BAC}$

D) Consideremos los triángulos rectángulos.

$\overset{\triangle}{ADB} - S - \overset{\triangle}{ADC}$ .... $\overset{\angle}{\alpha} = \overset{\angle}{\beta}$ … … … … Lados respectivamente perpendiculares
Consecuentemente sus tres angulos seran iguales
y seran semejantes.

Consideremos ahora los triángulos rectángulos.

$\overset{\triangle}{BAC} - S - \overset{\triangle}{ADC}$ .... β es un angulo en común
Luego, sus tres angulos
seran iguales.

Dos triángulos semejantes a un tercero serán semejantes entre sí.

$\boxed{\overset{\triangle}{ADB} - S - \overset{\triangle}{ADC} - S - \overset{\triangle}{BAC}}$ ....Que es la 1ª tesis.

b) **La altura relativa a la hipotenusa es media proporcional entre los dos segmentos determinados en la hipotenusa.**

H) $\overset{\angle}{A} = 1\angle\, Rto$ .... $\overset{\triangle}{ABC}$ triangulo rectángulo.

$\overline{AD} \perp \overline{BC}$ .... $\overline{AD}$ altura relativa a hipotenusa.

T) $\dfrac{\overline{AD}}{\overline{DB}} = \dfrac{\overline{CD}}{\overline{AD}}$ ....o......................... $\boxed{\overline{AD}^2 = \overline{CD}\,.\,\overline{DB}}$

D) En la primera parte demostramos que

$$\overset{\triangle}{ADB} - S - \overset{\triangle}{ADC}$$

Luego sus lados homólogos son proporcionales.

Siendo $\overset{\angle}{\alpha} = \overset{\angle}{\beta}$ tendremos:

$$\frac{\overline{DB}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{CD}} \Longrightarrow \boxed{\overline{AD}^2 = \overline{CD}\,.\,\overline{DB}}$$

c) **Cada cateto es media proporcional entre la hipotenusa y el segmento de esta contiguo al mismo (O su proyección sobre la hipotenusa)**

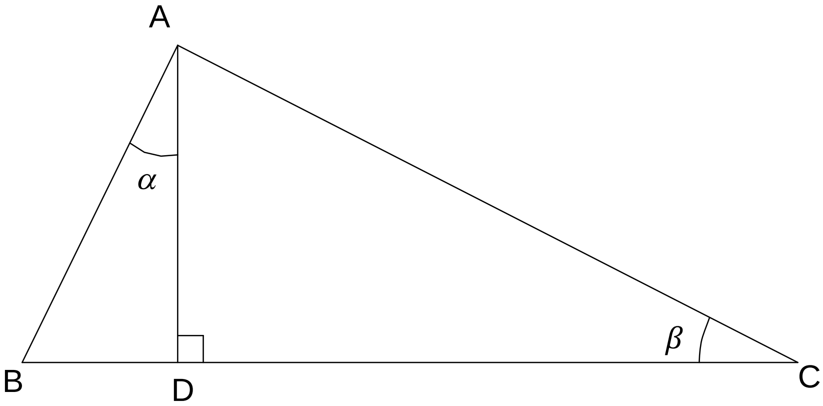
H) $\overset{\triangle}{ABC}$ triangulo rectángulo.

$\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ catetos

$\overline{AD} \perp \overline{BC}$

T) $\boxed{\overline{AB}^2 = \overline{BC}\,.\,\overline{BD}}$

$\boxed{\overline{AC}^2 = \overline{BC}\,.\,\overline{DC}}$



D) Por el ítem (a) de este teorema sabemos

$\overset{\triangle}{ADB} - S - \overset{\triangle}{BAC}$……………………………Siendo…………………………………… $\alpha = \beta$

Luego formando la proporción entre lados homólogos tendremos:

$\dfrac{\overline{BD}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$……………………………………o………………………………… $\boxed{\overline{AB}^2 = \overline{BC}\,.\,\overline{BD}}$

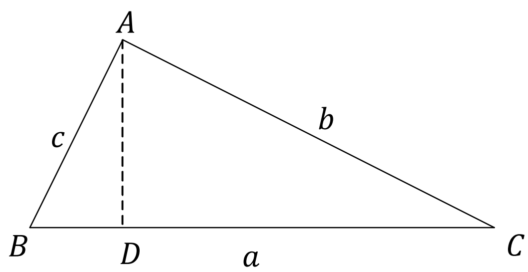
También tenemos: $\overset{\triangle}{ADC} - S - \overset{\triangle}{BAC}$ ………………………………β……………………ángulo común.

Luego formando la proporción entre lados homólogos.

$\dfrac{\overline{DC}}{\overline{AC}} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$…………………………………………o………………………… $\boxed{\overline{AC}^2 = \overline{BC}\,.\,\overline{DC}}$

Teorema de Pitágoras.

TEOREMA: En todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.



H) $\overset{\triangle}{BAC}$.............triangulo rectángulo.........$\overset{\angle}{A} = 1\angle Rto.$

$\overline{BC} = a$.................Hipotenusa.

$\overline{AB} = c$.................cateto.

$\overline{AC} = b$..................cateto.

T) $a^2 = b^2 + c^2$

D) Por el vértice del ángulo recto $\overset{\angle}{A}$, trazamos una perpendicular a $\overline{BC}$ quedando determinado el punto D, y los triángulos rectángulos $\overset{\triangle}{ADC}$ y $\overset{\triangle}{ADB}$ ....puesto que $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ por construcción.

Por el teorema que dice: “ Si desde el vértice del ángulo recto de un triángulo rectángulo, se traza una recta perpendicular a la hipotenusa se verifica: cada cateto es media proporcional entre la hipotenusa y el segmento de esta contiguo al mismo”.

Luego:

$\overline{AB}^2 = \overline{BC} \,.\, \overline{BD}$..(1)

$\overline{AC}^2 = \overline{BC} \,.\, \overline{DC}$ ....(2)

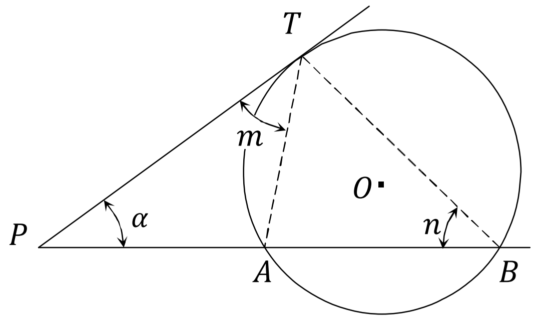
Sumando............. $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC} \,.\, (\, \overline{BD} + \overline{DC}\,)$ ....(3)

Pero ....$\overline{BD} + \overline{DC} = \overline{BC}$ que llevamos en (3)

y tendremos: $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$

o también $a^2 = b^2 + c^2$ ....Que es la tesis.

TEOREMA: Si desde un punto exterior a un circulo se trazan a su circunferencia una recta secante y otra tangente, el segmento de la tangente, de extremos en el punto dado y en el de tangencia, es media proporcional entre los segmentos de la secante comprendidos entre el punto dado y la circunferencia.



H) P punto exterior a Cia O.

PT..........................tangente a la Cia O.

PB........................Secante a la Cia O.

T) $\overline{PT}^2 = \overline{PB}\,.\overline{PA}$

D) Uniendo el punto T con los puntos A y B respectivamente se forman los siguientes triángulos.

$\overset{\triangle}{PAT} - S - \overset{\triangle}{PTB}$.....................
- $\overset{\angle}{\alpha} = \overset{\angle}{\alpha}$ … … … … … … … . angulo común
- $\overset{\angle}{m} = \overset{\angle}{n}$ … … … … … … . . Por ser ambos $\frac{1}{2}\,\overset{\frown}{TA}$ (Inscriptos)
- Luego tendran sus tres ángulos iguales y serán semejantes

Escribiendo la proporcionalidad de los lados homólogos.

$$\frac{\overline{PT}}{\overline{PA}} = \frac{\overline{PB}}{\overline{PT}}$$ ....O .... $\overline{PT}^2 = \overline{PB}\,.\overline{PA}$

COROLARIOS:

1- Toda recta paralela a uno de los lados de un triángulo divide los otro dos en partes proporcionales.

2- Si una recta divide dos lados de un triángulo en partes proporcionales, es paralela al tercer lado.

3- Los perímetros de dos polígonos semejantes son entre sí como dos lados homólogos cualesquiera.

4- Si dos polígonos son semejantes, se pueden descomponer en un mismo número de triángulos semejantes, semejantemente dispuestos.

5- Si desde un punto exterior a una Cia se trazan varias secantes y una tangente se verifica: El producto de los segmentos de cada secante es constante e igual al cuadrado de la tangente.

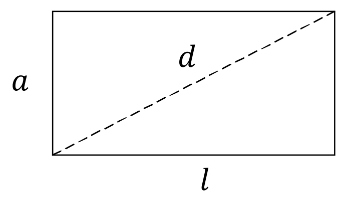
1-) Unida de área: La unidad de área en el sistema métrico decimal es el m^2 que es el área de un cuadrado de $1m$ de lado.

Los submúltiplos son: dm^2 ; cm^2 ; mm^2

Y los múltiplos : Dm^2 ; $Hm^2 = Ha$…………………………etc.

2-) Figuras equivalentes: Decimos que dos figuras planas o polígonos son equivalentes cuando tienen la misma área independiente de la forma que ambas posean.

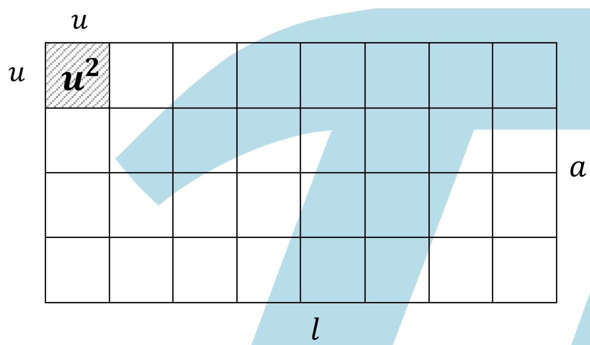
3-) Área del rectángulo:



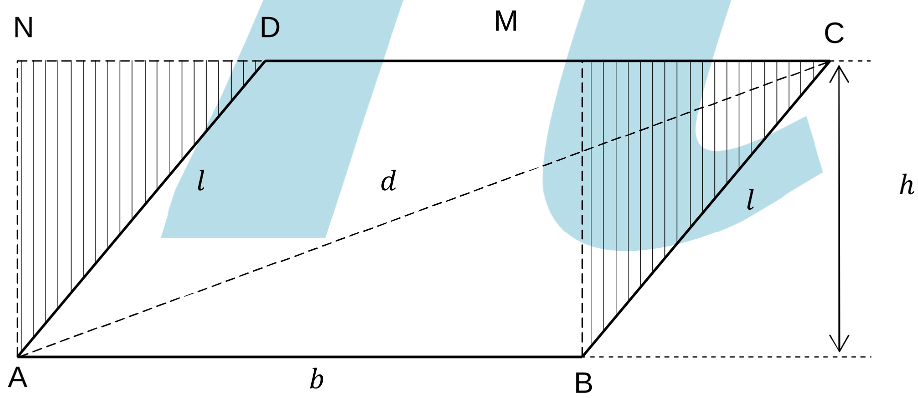
$A = l.a$

$P = 2(l + a)$

Pitágoras: $d^2 = l^2 + a^2$



4-) Área del paralelogramo:



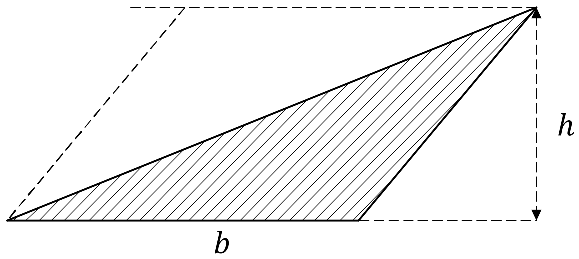
$A = b.h$

$P = 2(b + l)$

En el grafico estamos ilustrando del porqué de la fórmula de área del paralelogramo.

Pues el paralelogramo $ABCD$ posee un área equivalente al rectángulo $ABMN$ y el ancho del rectángulo es la altura h, es decir, la distancia entre las paralelas consideradas como base.

5-) Área del triángulo:



El área de cualquier triangulo se calcula con la siguiente formula general.

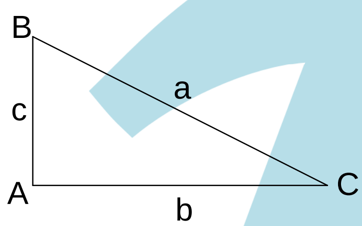
$$A = \frac{b.h}{2}$$

La altura relativa a un lado es el segmento de la perpendicular comprendido entre un vértice y el lado opuesto o su prolongación.

En el cálculo del área de cualquier triángulo el producto b x h representa el área del paralelogramo que se forma con el triángulo como ilustra la figura, y que es el doble del triángulo por eso se divide por 2.

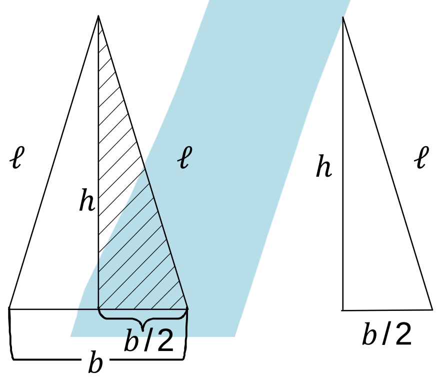
Se puede elegir cualquier lado como base y multiplicar por su respectiva altura.

- Área del triángulo rectángulo:



$$A = \frac{b.c}{2}$$

- Área del triángulo isósceles:

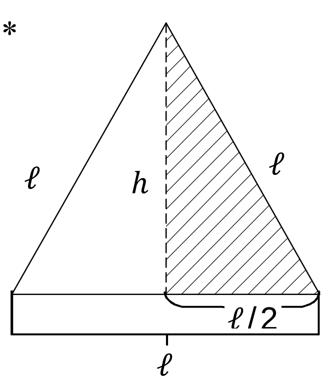


$$A = \frac{b.h}{2}$$

$$l^2 = h^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2$$ Teorema de Pitágoras

$$P = 2\ell + b$$

- Área del triángulo equilátero:
-



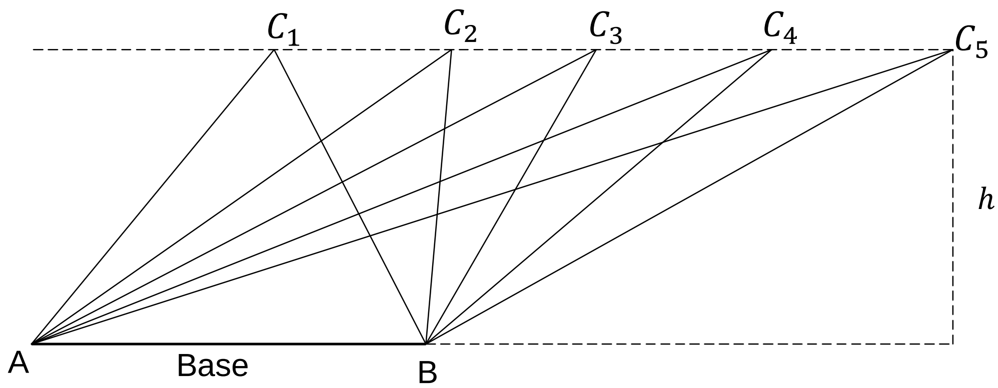
$$A = \frac{\ell.h}{2}$$

$$\ell^2 = h^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2$$ Teorema de Pitágoras

$$P = 3\ell$$

No hace falta memorizar estas fórmulas, es solo aplicar la formula general en cada caso.
Pero es importante saber aplicar el teorema de Pitágoras en cualquier posición.

Anexo: Para una mejor visualización del área de un triángulo, mostramos a continuación diferentes triángulos equivalentes.



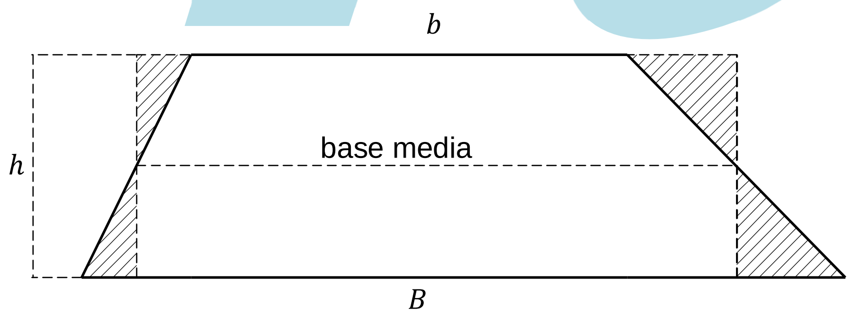
Los triángulos $\left.\begin{array}{c}\Delta\, ABC_1\\ \Delta\, ABC_2\\ \Delta\, ABC_3\\ \Delta\, ABC_4\\ \vdots\\ etc.\end{array}\right\}$ Son Triángulos equivalentes.

Tendrán la misma área pues tienen la misma base y la misma altura.

Área del trapecio: Sea cual fuese el tipo de trapecio la formula general del área es.

$$A = \left(\frac{B+b}{2}\right).h$$

El factor $\left(\frac{B+b}{2}\right)$ es la base media que también se puede llamar semisuma de las bases. Esta base media corta a los lados exactamente a la mitad de la altura.

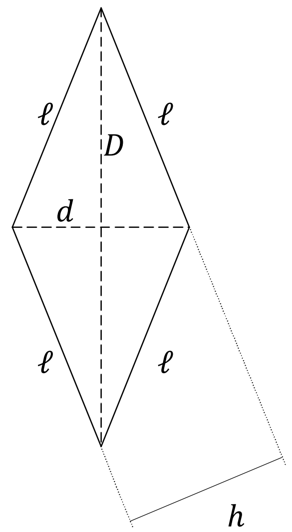


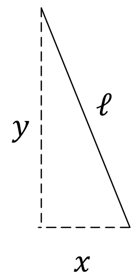
$$b_m = \frac{B+b}{2}$$

Observar en el grafico la transformación del trapecio en un rectángulo equivalente, en torno a la base media.

El trapecio se presta para aplicar el teorema de Pitágoras en los dos extremos.

Área del Rombo:





La fórmula convencional para calcular el área del rombo es

$$A = \frac{D.d}{2}$$

Las diagonales son ⊥s entre sí, y dividen al rombo en 4 triángulos rectángulos.

La diagonal pequeña lo divide en 2 triángulos Isósceles.

La diagonal grande lo divide en 2 triángulos Isósceles.

$P = 4\,\ell$

$x = \dfrac{d}{2}$ $\qquad x^2 + y^2 = \ell^2$

$y = \dfrac{D}{2}$

Anexo:

El rombo es un paralelogramo con sus cuatro lados iguales.

También le podríamos aplicar el área del paralelogramo si así fuese conveniente en cierto caso.

En el grafico podemos ver:

$$\boxed{A = \ell . h}$$

y tendríamos la misma área.

1- Polígono Regular: Es el polígono equiángulo y equilátero es decir tiene todos sus lados y ángulos iguales.

Ej.: Triángulo equilátero.

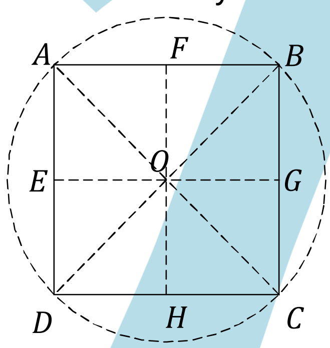
Hexágono regular.

Polígono regular $\begin{cases} S_{(i)} = 180(n - 2) \\ A_{(i)} = \dfrac{180(n-2)}{n} \end{cases}$

Polígono regular $\begin{cases} S_{(e)} = 4\,Rtos = 360 \\ A_{(e)} = \dfrac{360}{n} \end{cases}$

$$A_{(i)} + A_{(e)} = 180°$$

2- Centro de un polígono regular: el centro de un polígono regular es el punto del plano que equidista de los vértices y de los lados del polígono.



$\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = \overline{OD}$................Centro-Vértice

$\overline{OE} = \overline{OF} = \overline{OG} = \overline{OH}$.................Centro-Lado

O...........centro del polígono.

3- Radio de un polígono regular: es el segmento de recta comprendido entre el centro del polígono y cualquiera de sus vértices.

Ej: $\overline{OC}$..............Radio del polígono regular R.

$R = \overline{OC} = \overline{OD} = \overline{OB} = \overline{OA}$

OBS: Se lo representa por R mayúscula y es el centro de la cia. Circunscripta.

Apotema de un polígono regular:

Es la distancia entre el centro del polígono y cualquiera de sus lados.

Ej: $a = apot = \overline{OE} = \overline{OG} = \overline{OF} = \overline{OH} = r$

Se lo representa por r minúscula, pues es el radio de la cia inscripta en el polígono.

Polígono circunscripto respecto a una Cia:

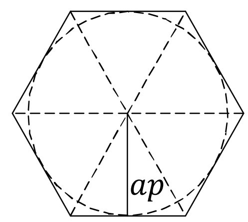
Es el polígono cuyos lados son tangentes a la cia.

En este caso también podríamos decir que la cia está inscripta en el polígono.

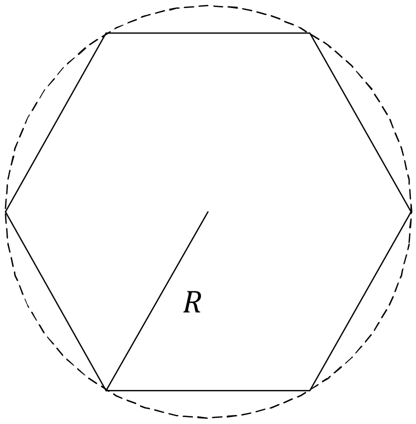
El radio de esta cia, generalmente se lo designa por r (minúscula)………$r = apot$.

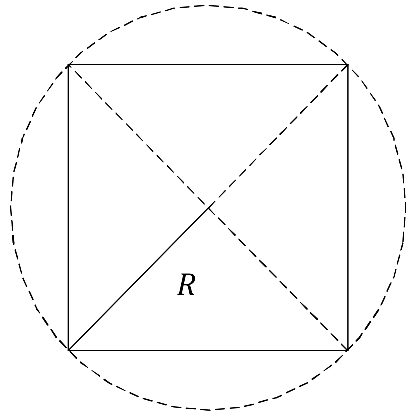
OBS: La apotema entonces representa también la altura de cada triangulo que se forma uniendo el centro a los vértices del polígono. El número de triángulos, es igual al número de lados del polígono.

$$ap = r$$



4- <u>Polígono inscripto a una cia:</u> es el polígono cuyos vértices son puntos de la cia.

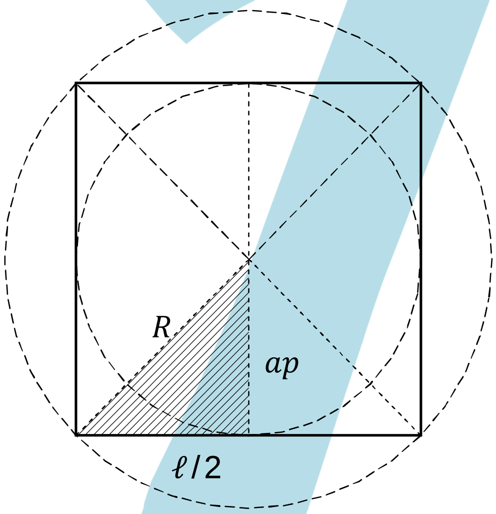




El centro de la cia coincide con el centro del polígono y los radios son iguales.

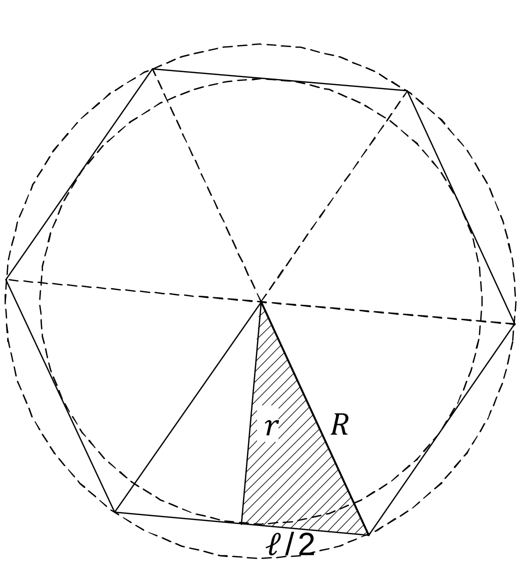
En este caso podríamos decir también que la cia está circunscripta al polígono.

<u>ANEXO:</u> El centro de un polígono regular coincide con el centro de las cias inscripta y circunscripta al polígono.



$$r = ap = \frac{\ell}{2}$$

$$R = \frac{d}{2}$$



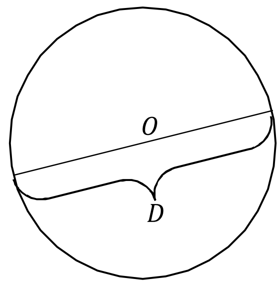
$$R = \ell$$

$$r = ap$$

5- <u>Relación de la cia a su diámetro:</u>

Longitud de una cia es el perímetro o la dimensión lineal que tiene dicha cia.

La relación de la cia a su diámetro es un número inconmensurable y se lo denomina π (Pi)



D.......................diámetro de Cia O

Cia = C................Perímetro de la Cia O.

$$\frac{C}{D} = \pi = 3{,}1415926...$$

Esta relación es un número inconmensurable y en cualquier cia es una constante.

$$D = 2R \text{..................................} R = Radio\ de\ Cia$$

6- <u>Longitud de una cia:</u> es el perímetro o la dimensión lineal que tiene dicha Cia.

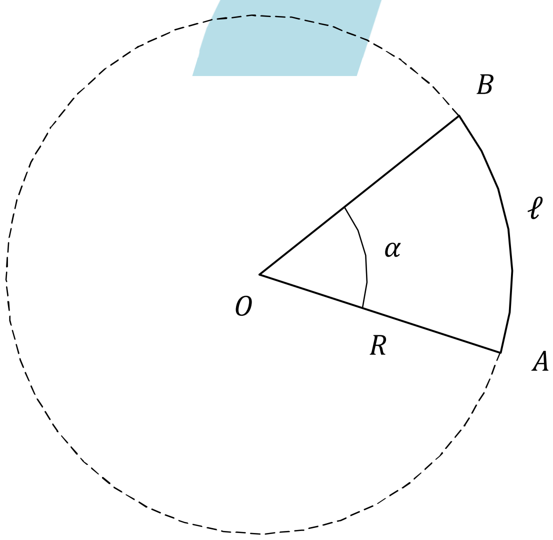
Por la relación anterior sabemos qué.

$\frac{C}{D} = \pi$...............................Constante.

Luego: $C = D.\pi$

$$Cia = 2R\pi$$

7- <u>Longitud de un arco de cia:</u> es la dimensión lineal de un determinado arco de cia.



$$\boxed{\ell_{\overset{\frown}{AB}} = \alpha_{(Rad)} \cdot R}$$

8- Área de un polígono regular:

Siendo n el número de lados de un polígono regular, el área siempre puede ser expresada por la siguiente formula general.

$$\boxed{A = n.\left(\frac{\ell.ap}{2}\right)} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

El producto $\frac{\ell.ap}{2}$ representa el área de los triangulitos en que se dividen el polígono regular al trazar todos los radios de la cia circunscrita al polígono.

Teniendo en cuenta que el perímetro de un polígono regular siempre será:

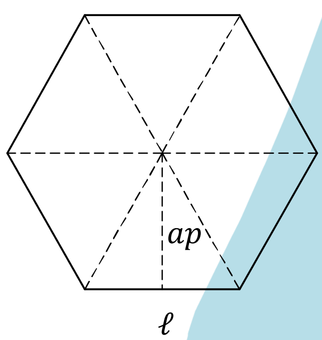
$$\boxed{P = n.\ell} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Llevando (2) en (1) tendremos:

$$A = \frac{P.ap}{2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Cualquiera de estas dos fórmulas (1) y (3) podrían usarse.

HEXÁGONO REGULAR.

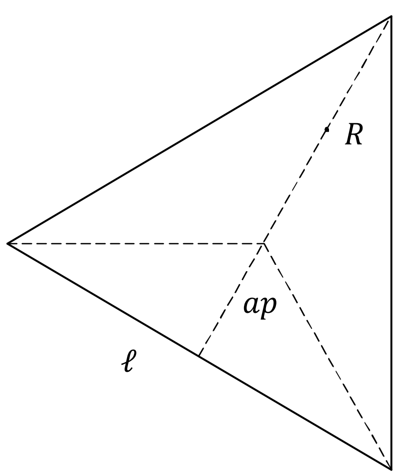


$$\boxed{P = 6.\ell}$$

$$\boxed{A = 6.\frac{\ell.ap}{2}} = 3.\ell.ap$$

$$A = P.\frac{ap}{2}$$

TRIÁNGULO EQUILATERO



$$\boxed{P = 3.\ell}$$

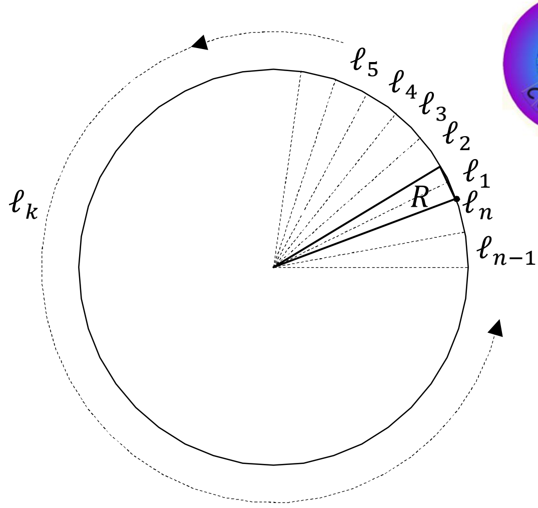
$$A = 3.\frac{\ell.ap}{2}$$

$$\boxed{A = \frac{\ell.h}{2}}$$

$$ap = \frac{R}{2} = \frac{h}{3}$$

OBS: Esto siempre se verifica para cualquier polígono regular.

Área de un círculo: Podemos considerar a un círculo como un polígono de infinitos lados.



La apotema será la altura de cada triangulito infinitesimal...$apot = R$, y el perímetro será igual a la Cia.

Dividiendo el circulo en infinitos triángulos con vértices en el centro del circulo y de alturas iguales a R.

Es estas condiciones tendremos:

$$A_1 = \frac{\ell_1 \cdot R}{2}$$

$$A_2 = \frac{\ell_2 \cdot R}{2}$$

$$A_3 = \frac{\ell_3 \cdot R}{2}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$A_n = \frac{\ell_n \cdot R}{2}$$

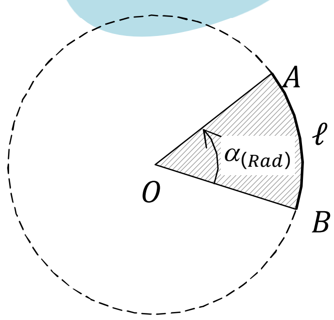
Sumando m. a m. $\quad A_1 + A_2 + A_3 + \cdots + A_n = \frac{R}{2} \cdot (\ell_1 + \ell_2 + \ell_3 + \cdots + \ell_n)$

$$A = \frac{R}{2}\, Cia$$

$$A = \frac{R}{2} \cdot 2\pi R$$

$\boxed{A = \pi R^2}$..................Que es la fórmula para el área.

Sector circular: es la parte del círculo comprendida entre un arco y los radios que van a sus extremos.

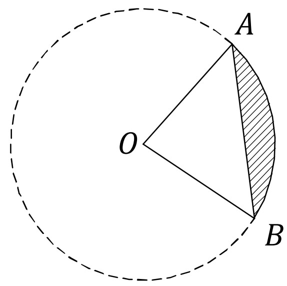


Podemos considerar como un triángulo cuya base es $\ell_{\frown AB} = \alpha_{(Rad)} . R$ y cuya altura (apotema) es igual al radio R.

$$A_{\triangledown AOB} = \frac{\ell . R}{2} = \frac{\alpha_{(Rad)} . R . R}{2}$$

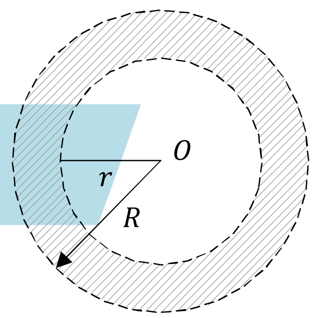
$\boxed{A_{\triangledown AOB} = \frac{1}{2}\alpha_{(Rad)} . R^2}$ ... . Área de un sector circular

OBS: Por analogía con el área del círculo podríamos descomponer en pequeños triangulitos, y la suma de todas las bases será $\ell_{\frown AB}$.



__Segmento circular__: es la parte de un círculo comprendida entre un arco de cia y su cuerda.

$$A_{\underset{AB}{\frown}} = A_{\underset{AOB}{\triangledown}} - A_{\underset{AOB}{\Delta}}$$ ....Área del segmento circular



CORONA CIRCULAR O ANILLO CIRCULAR:

Es la parte del círculo comprendido entre dos cias concéntricas.

$$A = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi(R^2 - r^2)$$

$$\boxed{A = \pi(R^2 - r^2)}$$ ....Área de la corona circular

Si queremos en función del diámetro.

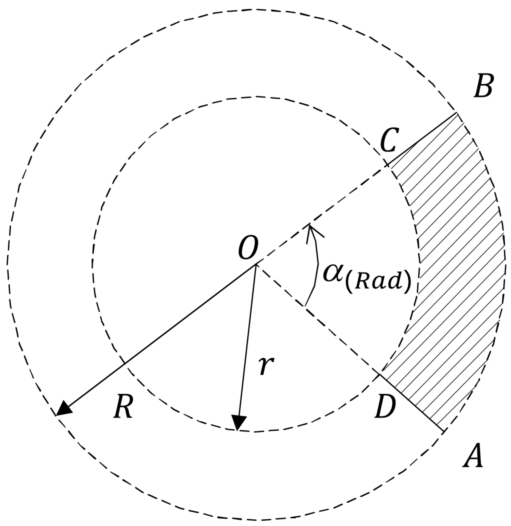
$$R = \frac{D}{2} \text{...} r = \frac{d}{2}$$

$$A = \pi\left(\frac{D^2}{4} - \frac{d^2}{4}\right) = \frac{\pi}{4}(D^2 - d^2)$$

OBSERVACION:

$$R^2 - r^2 = (R + r)(R - r)$$ ....Diferencia de cuadrados.

<u>TRAPECIO CIRCULAR:</u>



$$A_{\underset{ABCD}{\frown}} = A_{\underset{AOB}{\triangledown}} - A_{\underset{DOC}{\triangledown}}$$

$$= \frac{\alpha_{Rad}\,.\,R^2}{2} - \frac{\alpha_{Rad}\,.\,r^2}{2}$$

$$A_{\underset{ABCD}{\frown}} = \frac{1}{2}\,\alpha_{Rad}\,.\,(R^2 - r^2)$$ ....Que es el área buscada.

Otra forma de deducir la formula, utilizando el concepto de trapecio. $A = \frac{B\,+\,b}{2}\,.\,h$

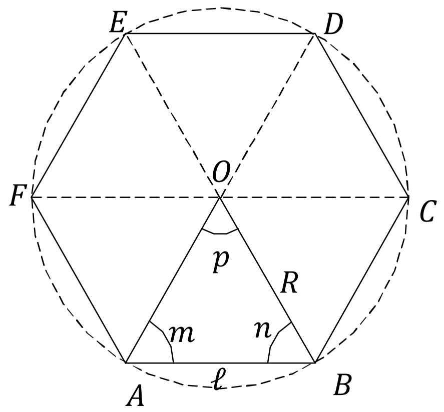
$$A_{\underset{ABCD}{\triangledown}} = \frac{\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{CD}}{2}(R - r)$$

$$= \frac{\alpha_{Rad}\,.\,R\,+\,\alpha_{Rad}\,.\,r}{2}(R - r)$$

$$= \frac{\alpha_{Rad}}{2}\,(R\,+\,r)(R\,-\,r)$$

$$A_{\underset{ABCD}{\frown}} = \frac{1}{2}\,\alpha_{Rad}(R^2 - r^2)$$ ....Que es área buscada.

Deducción de la fórmula para calcular el lado del hexágono regular inscripto en una cia de radio dado.



Sea el hexágono regular $ABCDEF$ inscripto en la cia de centro O y radio R.

$\overline{OA} = \overline{OB} = R$...................................$AB = \ell$

En el triangulo $\overset{\Delta}{AOB}$ tenemos:

$\angle m + \angle n + \angle p = 2\angle Rtos$......................(1) ....Porque la suma de los ángulos internos de un triángulo es igual a 2 Rtos

También tenemos: $\angle p = \dfrac{4Rtos}{6} = \dfrac{2Rtos}{3}$.................(2) Porque todos los ángulos centrales son iguales pues tienen la misma cuerda $\overline{AB}$ (lados iguales) y consecuentemente el mismo arco.

Llevando (2) en (1) tenemos.

$$\angle m + \angle n + \frac{2Rtos}{3} = 2\angle\, Rtos$$

$$\angle m + \angle n = \frac{4Rtos}{3} \text{ ....(3)}$$

En el triangulo $\overset{\Delta}{OAB}$ tenemos que: $\overline{OA} = \overline{OB} = R$

Luego en este triángulo tendremos: $\angle m = \angle n$...........................(4)............... Por oponerse a lados iguales.

Llevando (4) en (3)

Tendremos: $\angle m = \angle n = \dfrac{2Rtos}{3}$...................................(5)

De (2) y (5) podemos concluir que:

$$\angle m = \angle n = \angle p = \frac{2\angle Rtos}{3}$$

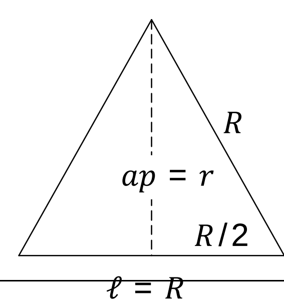
Luego el triangulo $\overset{\Delta}{OAB}$ es un triángulo equiángulo y también equilátero, porque a ángulos iguales se oponen lados iguales

$$\overline{AB} = \overline{OA} = \overline{OB} = \ell = R$$

$$\boxed{\ell = R}$$

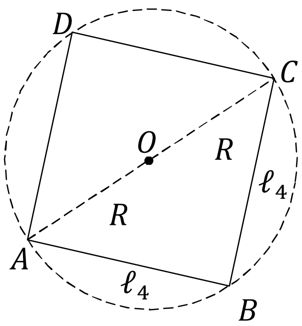
Entonces para construir un hexágono regular inscripto en una Cia, con el compás marcamos el radio de la cia y dividimos la cia en 6 partes iguales, siendo el radio igual a la cuerda correspondiente.

OBS: Para calcular la apotema que sería el radio r de la cia inscripta en el hexágono.



Deducción de la fórmula para calcular el lado del cuadrado inscripto en una cia de radio dado.

$ABCD$ es un cuadrado inscripto en la cia de centro O y radio R.



$$\overline{OA} = \overline{OC} = R$$
$$AB = BC = \ell_4$$

En el triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{ABC}$ tenemos:

$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AC}^2$..................Teorema de Pitágoras

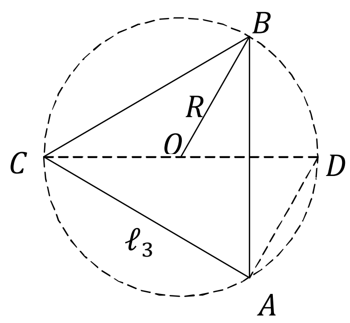
Pero: .... $\begin{cases} \overline{AC} = 2R \\ \overline{AB} = \ell_4 \\ \overline{BC} = \ell_4 \end{cases}$

Luego: $$\ell_4^2 + \ell_4^2 = 4R^2$$

$$2\ell_4^2 = 4R^2$$

$$\ell_4^2 = 2R^2 \Rightarrow \ell_4 = \sqrt{2}\,.\,R$$

Deducción el lado del triángulo equilátero inscripto en una cia de radio dado.



$\overset{\Delta}{ABC}$ triangulo equilátero inscripto en una cia de centro O y radio R.

$$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{AC} = \ell_3$$

$$OB = R$$

$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{AC} = \frac{1}{3}Cia$……………..Porque cuerdas iguales subtiende arcos iguales.

Por el punto C trazamos una $\perp$ al lado AB

Tendremos: $\overline{AM} = \overline{MB}$……………………………………………………..Porque la $\perp$ a una cuerda que pasa por el centro bisecta la cuerda y el arco subtendido.

Luego: $\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{DB}$

Pero el arco $\overset{\frown}{AB} = \frac{1}{3}Cia.$

Tendremos: $\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{DB} = \frac{1}{2} . \frac{1}{3}Cia = \frac{1}{6}Cia$

Luego podemos concluir: $\overline{AD} = R$……………..Porque AD es igual al lado del hexágono regular.

Considerando el triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{DAC}$…….Porque el ángulo $\overset{\angle}{CAD}$ esta inscripto en una semiCia.

Tendremos: $\overline{CD}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AD}^2$……………………………..(1)…………………Teorema de Pitágoras

Pero:…………………………………… $\left\{ \begin{array}{l} \overline{CD} = 2R \\ \overline{AD} = R \\ \overline{AC} = \ell_3 \end{array} \right\}$ …………………………en (1)

Luego: $4R^2 = \ell_3^2 + R^2$

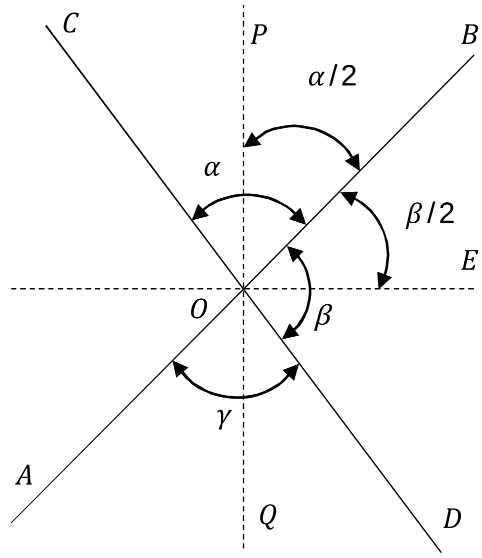
$$4R^2 - R^2 = \ell_3^2$$

$$3R^2 = \ell_3^2$$

Aplicando raíz cuadrada a ambos miembros tendremos:

$$\boxed{\ell_3 = \sqrt{3} . R}$$

1) **Las bisectrices de dos ángulos adyacentes pertenecen a rectas perpendiculares y la de dos ángulos opuestos por el vértice pertenecen a una misma recta.**



H) AB y CD son dos rectas que se cortan

$\angle\alpha$ y $\angle\beta$ ángulos adyacentes.

$\angle\alpha$ y $\angle\gamma$ ángulos opuestos por el vértice.

T) $OP \perp OE$ .... (1ª Parte)

OP y OQ .... Semirrectas opuestas (2ª Parte)

D) $\angle\alpha + \angle\beta = 2\angle$ Rtos............... Por adyacentes.

$$\overline{\quad 2 \quad = \quad 2 \quad}$$

Dividiendo m. a m. $\dfrac{\angle\alpha + \angle\beta}{2} = 1\angle\ Rto$

$$\frac{\angle\alpha}{2} + \frac{\angle\beta}{2} = 1\angle Rto$$

Luego $\angle POE = 1\ \angle\ Rto$ .... (1ª Parte)

$$\left.\begin{array}{l} OE \perp OP \dots\dots \\ OE \perp OQ \dots\dots \end{array}\right\}$$ ....Por la demostración anterior.

Por tanto: OP y OQ son perpendiculares a OE. Ambas rectas son perpendiculares a una misma recta en un mismo punto.

Luego OP y OQ son semirectas opuestas.. (2ª Parte)

TEOREMA

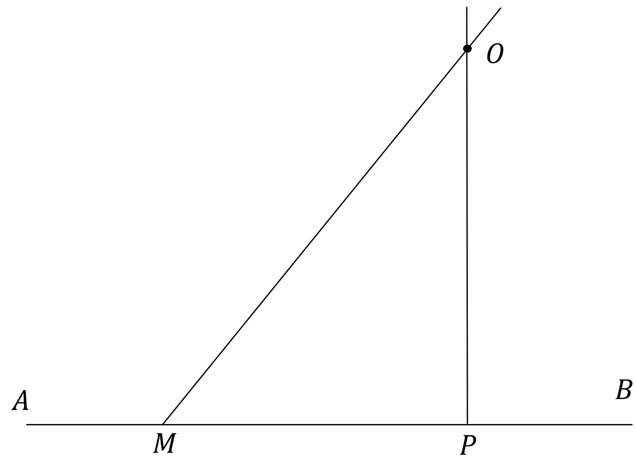
2) **La distancia de un punto a una recta es menor que un segmento oblicuo comprendido entre el punto y la recta.**

H) O punto exterior a AB

$OP \perp AB$

$OM < AB$

T) $\boxed{OP < OM}$



D) Considerando el $\overset{\triangle}{OPM}$ rectángulo, siendo $\begin{cases} \overline{OP} \text{ y } \overline{PM} \text{ ... ... los catetos} \\ \overline{OM} \text{ ... ... la hipotenusa} \end{cases}$

Luego $\boxed{\overline{OP} < \overline{OM}}$ .... porque en todo triangulo a mayor ángulo se opone mayor lado.

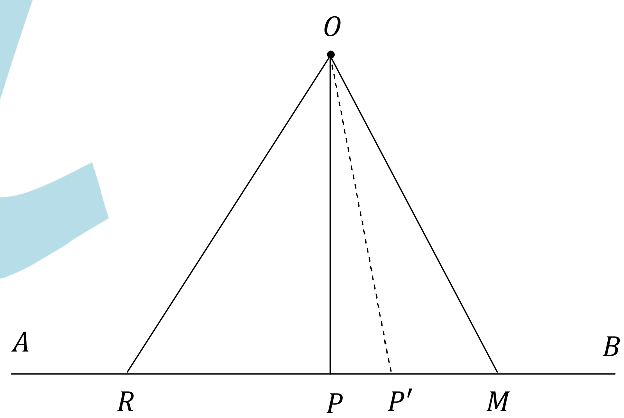
TEOREMA

3) **El menor de los segmentos de rectas comprendidos entre un punto y una recta es el que pertenece a la perpendicular por el punto a la recta.**

H) O punto exterior a AB.

$\overline{OP} < \overline{OM}$ y es el menor que cualquier otro segmento trazado de O a AB.

T) $\boxed{OP \perp AB}$



D) Supongamos que $OP \not\perp AB$.

Se traza por O una $\perp$ AB y sea $OP' \perp AB$.

OP' Es el menor de los segmentos, pues será la distancia de O a la recta AB y por tanto será menor que cualquier otro.

Pero $\overline{OP}$ es menor que cualquier otro segmento entre O y AB por hipótesis.

Luego $\overline{OP} = \overline{OP'}$ es decir coinciden.

Es decir $\boxed{OP \perp AB}$

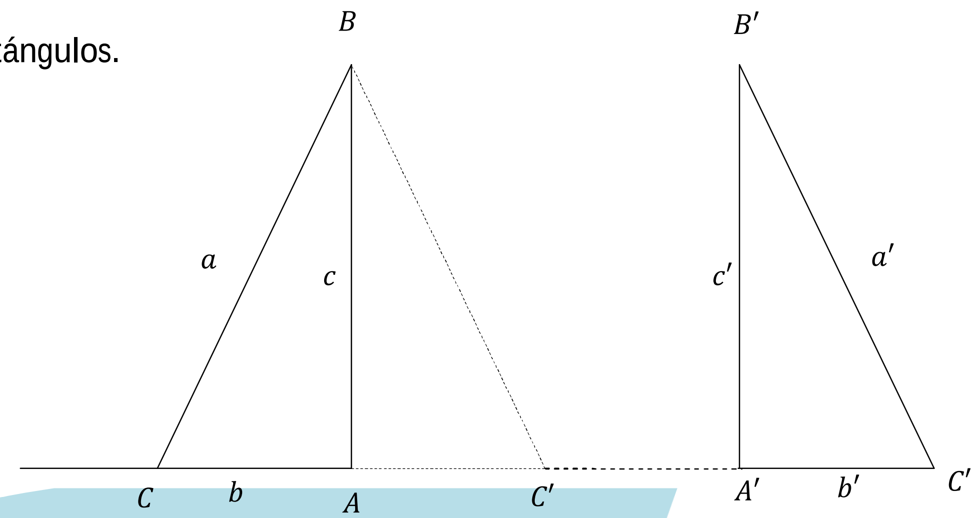
4) **Dos triángulos rectángulos son iguales si tienen respectivamente iguales la hipotenusa y un cateto.**

H) $\overset{\Delta}{BAC}$ y $\overset{\Delta}{B'A'C'}$ rectángulos.

$a = a'$

$c = c'$

T) $\boxed{\overset{\Delta}{BAC} = \overset{\Delta}{B'A'C'}}$



D) Colocando el $\overset{\Delta}{B'A'C'}$ de manera que la recta que contiene al lado c' coincida con la que contiene a c, y el vértice C' caiga en el semiplano opuesto al determinado por la recta AB y el punto C.

Haciendo coincidir B' con B, el punto A' coincidirá con A porque $c' = c$................ Por hipótesis.

Pero $\left\{ \begin{array}{c} AC \perp BA \\ A'C' \perp B'A' \end{array} \right\}$......................................Por ser $\overset{\angle}{A} = \overset{\angle}{A'} = 1 \angle Rto$......................Por hipótesis.

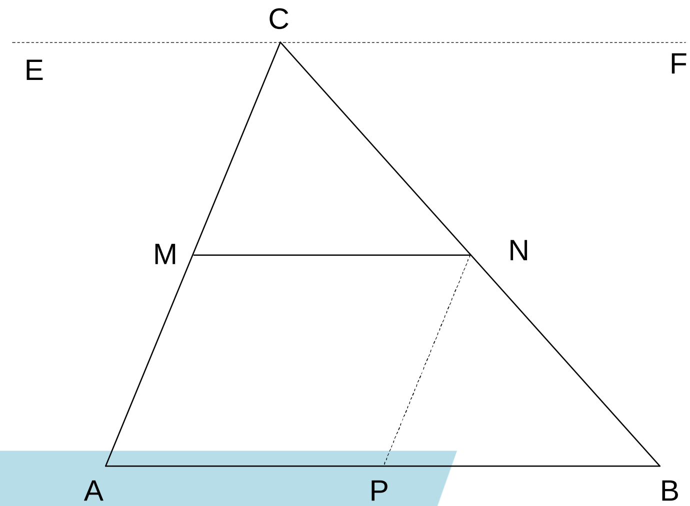
Por tanto la recta que contiene a b' coincidirá con la recta que contiene al lado b.
Porque "Por un punto de una recta pasa una sola perpendicular"

En estas condiciones tendremos:

$b = b'$................................ porque.......... "Si desde un punto exterior se tienen dos oblicuas iguales, sus pies equidistan del pie de la perpendicular común"

Por tanto $\boxed{\overset{\Delta}{BAC} = \overset{\Delta}{B'A'C'}}$

5) **La recta paralela a la que contiene un lado de un triangulo, por el punto medio de otro lado, pasa por el punto medio del tercer lado, y el segmento de recta de extremos en los puntos medios de dos lados de un triangulo, es igual a la mitad del primer lado.**



H) $\overset{\Delta}{ABC}$............. Triangulo cualquiera.

$\overline{CM} = \overline{MA}$

$MN \parallel AB$

T) $\boxed{\overline{CN} = \overline{NB}}$

$\boxed{\overline{MN} = \frac{1}{2}\overline{AB}}$

D) Trazando EF $\parallel$ MN $\parallel$ AB

$\overline{CM} = \overline{MA}$ .... Hipótesis.

Luego $\boxed{\overline{CN} = \overline{NB}}$ .... Porque "Si los segmentos determinados en una transversal por 3 o mas paralelas son iguales, también serán iguales los determinados en otra transversal por las mismas paralelas"

Por el punto N que es punto medio de $\overline{CB}$, trazamos $\overline{NP} \parallel \overline{AC}$.

Tendremos $\overline{AP} = \overline{PB}$.. Por la 1ª parte del teorema.

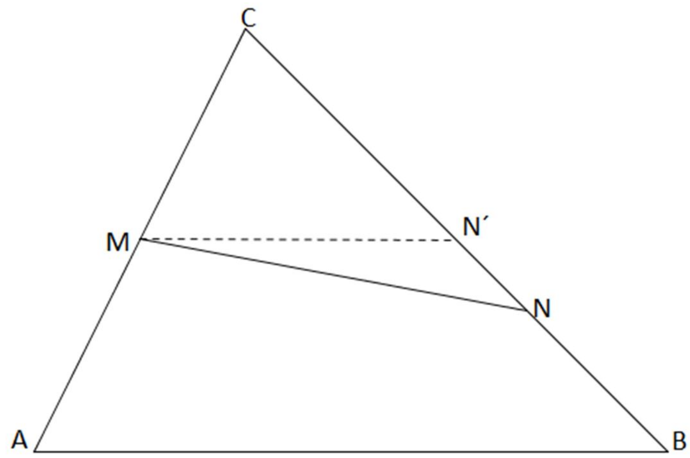
Pero $\overline{MN} = \overline{AP}$.................................... Por ser segmentos de las $\parallel_S$ comprendidos entre $\parallel_S$.

Luego $\overline{MN} = \overline{AP} = \overline{PB} = \frac{1}{2}\overline{AB}$

Es decir $\boxed{\overline{MN} = \frac{1}{2}\overline{AB}}$ ....Que es la tesis. 2ª Parte

<u>TEOREMA</u>

6) **La recta determinada por los puntos medios de dos lados de un triángulo, es paralela a la recta que contiene el tercer lado.**



H) $\overline{AM} = \overline{MC} = \frac{1}{2}\,\overline{AC}$

$\overline{BN} = \overline{NC} = \frac{1}{2}\,\overline{BC}$

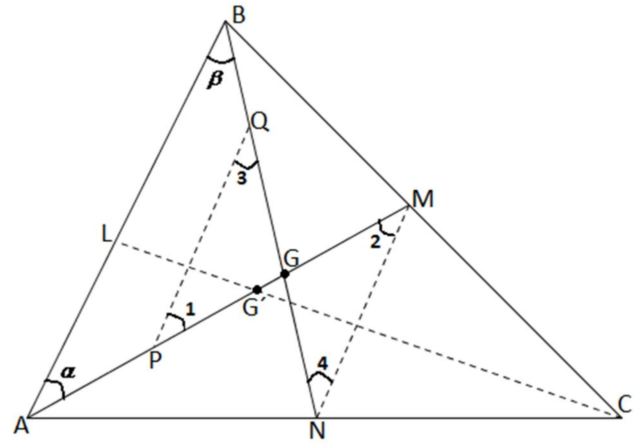
T) $MN \parallel AB$

D) Supongamos que $\overline{MN} \nparallel \overline{AB}$, entonces: trazamos $MN' \parallel AB$

Tendremos $\overline{BN'} = \overline{N'C} = \frac{1}{2}\,\overline{BC}$………………..por que “Si por el punto medio del lado de un triángulo se traza una paralela a otro lado, dividirá al tercer lado en partes iguales.”

Pero por hipótesis N es el punto medio de $\overline{BC}$, y un segmento no puede tener dos puntos medios, luego, el punto N’ y N coinciden y $MN \parallel AB$.

7) **Las medianas de un triángulo concurren en un punto situado en la tercera parte de cada una de ellas, a contar del lado correspondiente (baricentro)**



H) $\overline{BM} = \overline{MC} = \frac{1}{2}\,\overline{BC}$

$\overline{AN} = \overline{NC} = \frac{1}{2}\,\overline{AC}$

$\overline{AM}$ y $\overline{BN}$ medianas

T) $\overline{GM} = \frac{1}{3}\,m_a$

D) Las medianas $\overline{AM}$ y $\overline{BN}$ deben concurrir en un punto, pues de lo contrario tendrían que ser paralelas, es decir $\overset{\angle}{\alpha} + \overset{\angle}{\beta} = 2\angle\, Rtas$. Por conjugados internos.

Pero: $\overset{\angle}{\alpha} < \overset{\angle}{A}$

$\overset{\angle}{\beta} < \overset{\angle}{B}$ Sumanndo m. a m.

$\overset{\angle}{\alpha} + \overset{\angle}{\beta} < \overset{\angle}{A} + \overset{\angle}{B} < 2\angle$ Rtas.

Luego $\overline{AM}$ y $\overline{BN}$ concurren en un punto y sea G dicho punto.

Haciendo $\left\{\begin{array}{l} \overline{AP} = \overline{PG} \\ \overline{BQ} = \overline{QG} \end{array}\right\}$..............................Y uniendo los puntos P y Q.

Considerando $\overset{\Delta}{AGB}$..........$\left\{\begin{array}{l} \overline{PQ} \parallel \overline{AB} \\ \overline{PQ} = \frac{1}{2}\,\overline{AB} \end{array}\right\}$..............$\left\{\begin{array}{l}\text{El segmento que une los puntos medios} \\ \text{de dos lados de un } \Delta \text{ es } \parallel \text{ al tercero} \\ \text{y la mitad de este.}\end{array}\right.$

Trazando $\overline{MN}$

Considerando $\overset{\Delta}{ABC}$..............................$\left\{\begin{array}{l} \overline{MN} \parallel \overline{AB} \\ \overline{MN} = \frac{1}{2}\,\overline{AB} \end{array}\right\}$...............Por el mismo motivo anterior.

Considerando $\overset{\Delta}{PQG} = \overset{\Delta}{MNG}$ … … $\left\{\begin{array}{l} \overline{PQ} = \overline{MN} \text{ … … … … . . . Por ser ambos igual a } \frac{1}{2}\overline{AB} \\ \overline{PQ} \parallel \overline{MN} \text{ … … … … … Por ser ambos } \parallel_S \text{ a } AB \\ \left.\begin{array}{l} \overset{\angle}{1} = \overset{\angle}{2} \text{ … …} \\ \overset{\angle}{3} = \overset{\angle}{4} \text{ … …} \end{array}\right\} \text{ … … … . Angulos alternos internos entre } \parallel_S \\ \text{Igualdad de triángulos 1 lado y 2 ángulos adyacentes iguales.} \end{array}\right.$

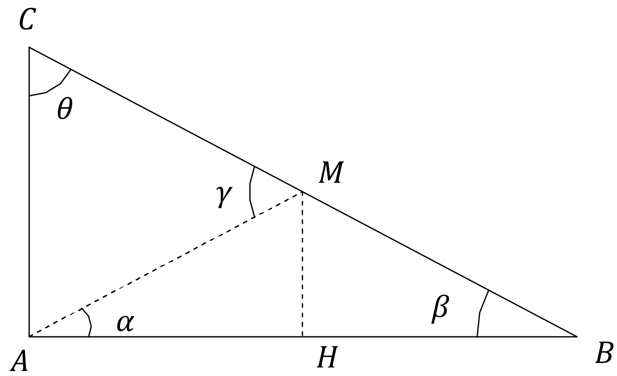
Luego $\overline{PG} = \overline{GM}$ .... Elementos homólogos de Δs iguales.

Por consiguiente $\overline{GM} = \frac{1}{3}\,\overline{AM} = \frac{1}{3}m_a$

Suponiendo que le mediana CL no pase por G, entonces corta a AM en G'. Entonces $\overline{G'M} = \frac{1}{3}\overline{AM}$ por la demostración anterior.

Luego G' coincide con G, y las tres medianas concurren en G.

TEOREMA: **Si uno de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo es el doble del otro, la hipotenusa es el doble del cateto menor.**



H) Sea el $\overset{\triangle}{CAB}$ rectángulo en A.

$\overset{\angle}{\theta} = 2\overset{\angle}{\beta}$

T) $\overline{BC} = 2\,\overline{AC}$

D) Sea M el punto medio del lado $\overline{BC}$

Sea $\overline{MH} \,/\!/\, \overline{AC}$, luego $\overline{MH} \perp \overline{AB}$ Si una recta es $\perp$ a otra también lo será a su paralela.

También $\overline{AH} = \overline{BH}$ ....Si por el punto medio de un lado trazamos una paralela a otro lado dividirá el tercer lado en dos partes iguales.

Uniendo el punto A con el punto M, tendremos los siguientes.

$\overset{\triangle}{AHM} = \overset{\triangle}{MHB}$ ... ... $\begin{cases} \overline{MH} = \overline{MH} \text{ ... ... Lado común} \\ \overline{AH} = \overline{HB} \text{ ... ... Por demostración enterior.} \\ \text{Triángulos rectangulos por ser } \overline{MH} \perp \overline{AB} \\ \text{Dos catetos iguales.} \end{cases}$

Luego:........................ $\left\{ \begin{matrix} \overline{AM} = \overline{MB} \\ \overset{\angle}{\alpha} = \overset{\angle}{\beta} \end{matrix} \right\}$........por tanto $\overline{AM} = \overline{CM} = \overline{MB}$ por ser M punto medio $\overline{BC}$

Considerando el triángulo $\overset{\triangle}{AMB}$ tenemos

$\overset{\angle}{\gamma} = \overset{\angle}{\alpha} + \overset{\angle}{\beta}$ .... Ángulo externo.

También $\overset{\angle}{\gamma} = 2\overset{\angle}{\beta}$..(1)

Pero $\theta = 2\overset{\angle}{\beta}$ ....(2)..............Por hipótesis.

De (1) y (2) tendremos $\overset{\angle}{\theta} = \overset{\angle}{\gamma}$

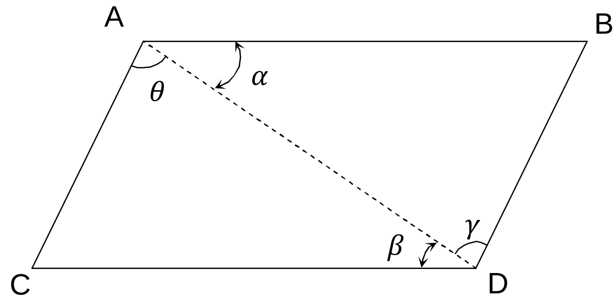
Entonces: $\overline{AM} = \overline{AC}$

o también $\overline{AC} = \overline{CM} = \overline{MB}$

Luego: $\overline{BC} = 2\,\overline{AC}$ ....Que es la tesis.

TEOREMA: **Si un cuadrilátero tiene respectivamente iguales sus lados opuestos o sus ángulos opuestos, es un paralelogramo.**

H) $\overset{\angle\!\!\!/}{ABCD}$ es un cuadrilátero.



a) $\begin{cases} \overline{AB} = \overline{CD} \\ \overline{AC} = \overline{BD} \end{cases}$

b) $\begin{cases} \overset{\angle}{A} = \overset{\angle}{D} \\ \overset{\angle}{B} = \overset{\angle}{C} \end{cases}$

T) $\overline{AB} \,/\!/\, \overline{CD}$

$\overline{AC} \,/\!/\, \overline{BD}$

D) a) Trazando la recta AD se formaran los siguientes.

$\overset{\triangle}{ACD} = \overset{\triangle}{ABD}$ ……………………………………… $\begin{cases} \overline{AB} = \overline{CD} \text{ ……………… Por hipótesis} \\ \overline{AC} = \overline{BD} \text{ ……………… Por hipótesis} \\ \overline{AD} = \overline{AD} \text{ ……………… Lado común} \\ \text{Por tener tres lados iguales} \end{cases}$

Luego: $\left.\begin{matrix} \overset{\angle}{\alpha} = \overset{\angle}{\beta} \\ \overset{\angle}{\theta} = \overset{\angle}{\gamma} \end{matrix}\right\}$ ……………………………….Pero estos ángulos son alternos internos.

Entonces $\left\{\begin{matrix} \overline{AB} \,/\!/\, \overline{CD} \\ \overline{AC} \,/\!/\, \overline{BD} \end{matrix}\right\}$ …………………………Que es la tesis.

b) $\overset{\angle}{A} + \overset{\angle}{B} + \overset{\angle}{C} + \overset{\angle}{D} = 4\angle\, Rtos$………….. Por ser la suma de los ángulos internos de un cuadrilátero S(i)= 2Rtos $(n-2)$.

Pero $\left.\begin{matrix} \overset{\angle}{A} = \overset{\angle}{D} \\ \overset{\angle}{B} = \overset{\angle}{C} \end{matrix}\right\}$ …………………………Por hipótesis.

Luego: 2A + 2B = 4∠Rtos

$\overset{\angle}{A} + \overset{\angle}{B} = 2\angle\, Rtos.$

Luego $\overline{AC} \,/\!/\, \overline{BD}$ …………………….. Porque “Si los ángulos conjugados internos son suplementarios, las rectas son paralelas”.

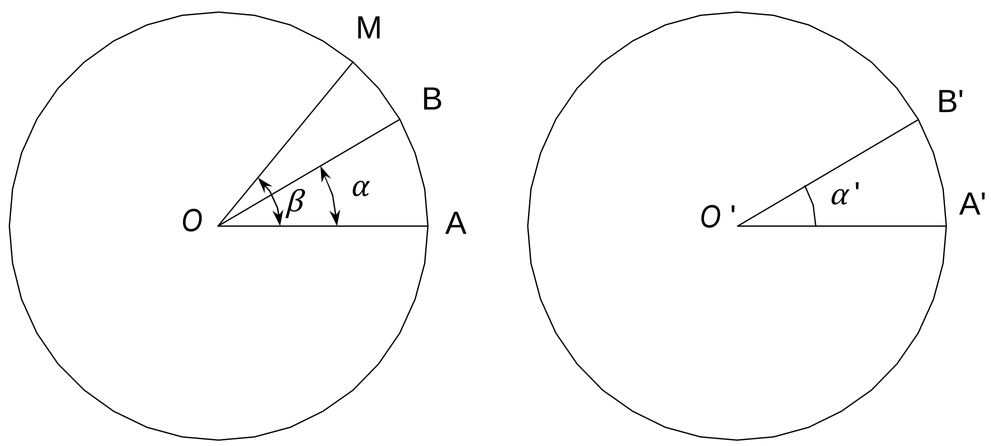
Con un razonamiento análogo tendremos:

$$\overset{\angle}{A} + \overset{\angle}{C} = 2\angle\,\text{Rtos}$$

Y también $\overline{AB} \,/\!/\, \overline{CD}$ …………………….. Por igual motivo anterior.

Luego $\overset{\angle\!\!\!/}{ABCD}$ Es un paralelogramo

TEOREMA: **En una misma cia. o en circunferencias de radios iguales, ángulos centrales iguales, interceptan arcos iguales y el mayor de dos ángulos centrales desiguales, intercepta mayor arco.**



$H_1)$ $\alpha = \alpha'$

$\overline{OA} = \overline{O'A'}$

$T_1)$ $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{A'B'}$

$D_1)$ Trasladando el circulo de centro O' sobre O, de tal manera que el centro O' coincida con O.

Se hace girar hasta que la recta que contiene al radio $\overline{O'A'}$ coincida con $\overline{OA}$.

Debido a que $\overset{\angle}{\alpha} = \overset{\angle}{\alpha}'$ por hipótesis, la recta que contiene $\overline{O'B'}$ coincidirá con la dirección de $\overline{OB}$, y siendo $\overline{O'B'} = \overline{OB}$ por hipótesis, el punto B' caerá en B.

Luego $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{A'B'}$ Que es la tesis. (1)

$H_2)$ $\overset{\angle}{\beta} > \overset{\angle}{\alpha}'$

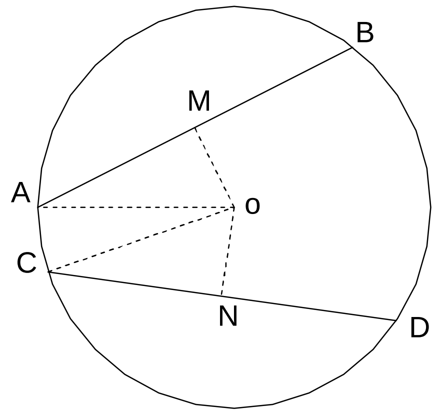
$T_2)$ $\overset{\frown}{AM} > \overset{\frown}{A'B'}$

$D_2)$ Continuando con el raciocinio de la demostración anterior.

La recta que contiene $\overline{O'B'}$, caerá dentro del ángulo $\overset{\angle}{AOM}$......................por ser $\beta > \alpha'$

Luego $\overset{\frown}{AM} > \overset{\frown}{A'B'}$ Que es la tesis. (2)

TEOREMA: **En una misma circunferencia o en Cias de radios iguales, cuerdas iguales equidistan del centro y de dos cuerdas desiguales la mayor dista menos del centro que la menor.**



$H_1)$ $\overline{AB} = \overline{CD}$

$T_1)$ $\overline{OM} = \overline{ON}$

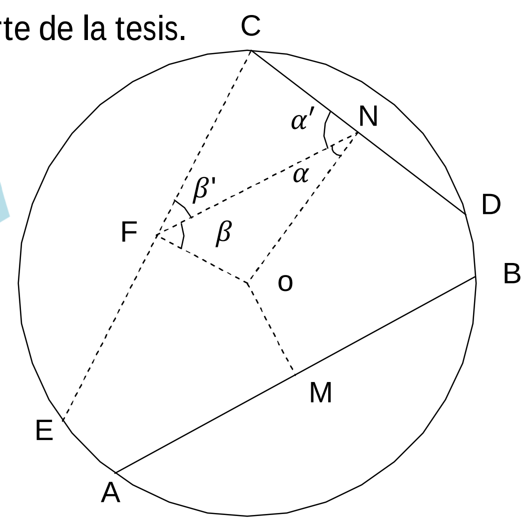
$D_1)$ $\left.\begin{array}{l}\overline{AB} = 2\overline{AM} \ldots . . \\ \overline{CD} = 2\overline{CN} \ldots . .\end{array}\right\} \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots .$ { Porque la $\perp$ por el centro de una cia a una cuerda lo divide en dos partes iguales.

Luego $\overline{AM} = \overline{CN}$ ....Porque $\overline{AB} = \overline{CD}$ ....Por hipótesis.

Uniendo los puntos A y C con el centro O de la cia tendremos:

$\overset{\triangle}{AMO} = \overset{\triangle}{CNO} \ldots \ldots \ldots .$ $\left\{\begin{array}{l}\overline{AM} = \overline{CN} \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots . \text{Por demostración anterior} \\ \overline{AO} = \overline{CO} \ldots \ldots \ldots \ldots . \ldots \text{Radios de una misma cia.} \\ \text{Igualdad de triangulos rectangulos: hipotenusa y un cateto.}\end{array}\right.$

Luego: $\overline{OM} = \overline{ON}$ ....Primera parte de la tesis.



$H_2)$ $\overline{AB} > \overline{CD}$

$T_2)$ $\overline{ON} > \overline{OM}$

$D_2)$ Trazamos por C la cuerda $\overline{CE} = \overline{AB}$

Luego $\overline{OM} = \overline{OF}$

También $\overline{CF} > \overline{CN}$...............Porque $\overline{AB} > \overline{CD}$

En el triángulo $\overset{\triangle}{FCN}$ tendremos.............. $\alpha' > \beta'$......... En un triángulo a mayor lado se opone mayor ángulo.

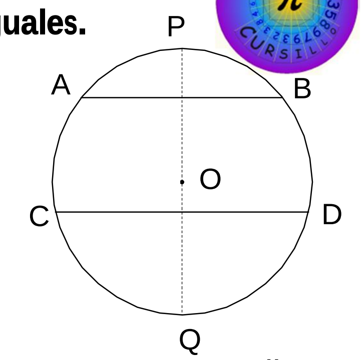
Luego $\beta > \alpha$ ....Por ser complementos de ángulos desiguales.

Entonces $\overline{ON} > \overline{OF}$ Porque a mayor ángulo se opone mayor lado.

Luego $\overline{ON} > \overline{OM}$ Que es la tesis.

TEOREMA: **En una circunferencia, dos rectas paralelas interceptan arcos iguales.**

a) **Cuando ambas rectas son secantes:**



H_1) AB // CD

T_1) $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD}$

D_1) Por el centro de la cia O, se traza una recta $PQ \perp AB$ también $PQ \perp CD$ por ser $CD \,/\!/\, AB$

$$\left.\begin{array}{c} \overset{\frown}{AP} = \overset{\frown}{PB} \\ \overset{\frown}{CQ} = \overset{\frown}{QD} \end{array}\right\}$$ Toda recta $\perp$ a una cuerda divide a la cuerda y a los arcos subtendidas en dos partes iguales.

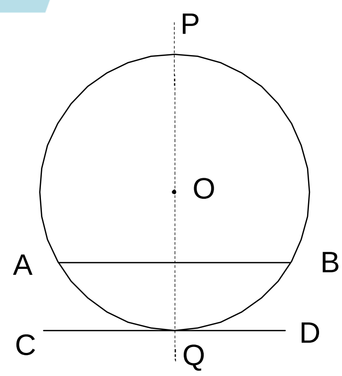
$\overset{\frown}{AP} + \overset{\frown}{CQ} = \overset{\frown}{PB} + \overset{\frown}{QD}$ ....(1)

Pero $\overset{\frown}{AP} + \overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{CQ} = \overset{\frown}{PB} + \overset{\frown}{BD} + \overset{\frown}{DQ}$................(2) Por ser ambas una semicircunferencia.

$\overset{\frown}{AP} + \overset{\frown}{CQ} = \overset{\frown}{PB} + \overset{\frown}{QD}$

Restando m. a m. $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD}$ ....Que es la tesis.

b) **Cuando una de ellos es tangente y la otra secante.**



H_2) AB // CD

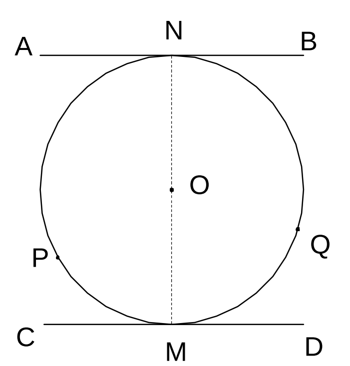
T_2) $\overset{\frown}{AQ} = \overset{\frown}{BQ}$

D_2) Se traza por el centro O $PQ \perp AB$ ...... También $PQ \perp CD$.......Porque $CD \,/\!/\, AB$

El punto Q será el punto de tangencia porque "La perpendicular trazada por el centro a un tangente pasa por el punto de tangencia".

Luego $\overset{\frown}{AQ} = \overset{\frown}{BQ}$

c) **Cuando ambas son tangentes:**



H_3) AB // CD

T_3) $\overset{\frown}{MPN} = \overset{\frown}{MQN}$

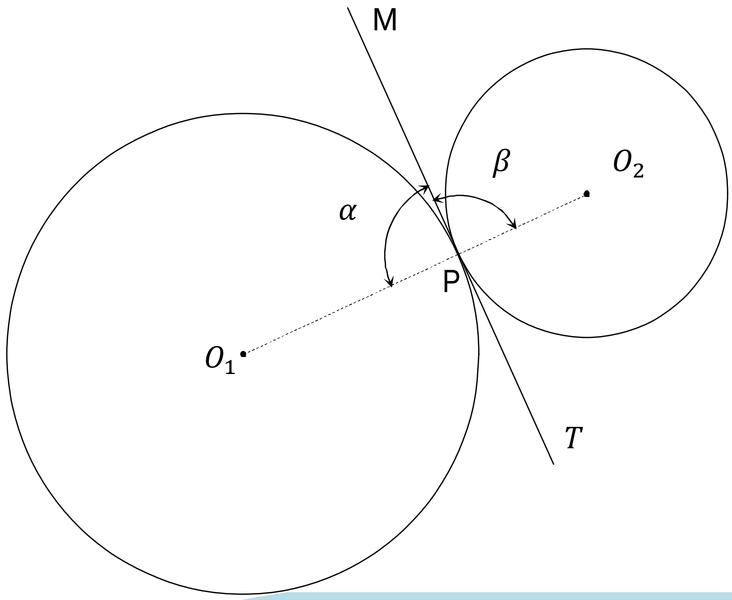
D_3) Por O trazamos $MN \perp AB$

Luego $MN \perp CD$ ....Por ser $CD \,/\!/\, AB$

También MN pasa por los puntos de tangencia $\left\{ \begin{array}{l} \text{La perpendicular a una recta tangente trazada} \\ \text{por el centro pasa por el punto de tangencia} \end{array} \right.$

Luego $\overset{\frown}{MPN} = \overset{\frown}{MQN}$ Que es la tesis.

TEOREMA: **Si dos circunferencias son tangentes, la recta determinada por los centros pasa por el punto de tangencia.**



H) Sean la Cia O_1 y Cia O_2 , tangente en el punto P.

T) O_1O_2 pasa por el punto P.

D) Sea MT la recta tangente común a ambas Cias en P .

Supongamos que O_1O_2 no pase por el punto P .

Trazamos la recta O_1P

Luego $O_1P \perp MT$ ……………………… "La línea que pasa por el centro y el punto de tangencia es $\perp$ a la tangente".

Y $\alpha = 1\angle$ Rto………………………………………………………………………(1)

Análogamente en O_2 trazamos O_2P

Y tendremos $O_2P \perp MT$……………………………"La línea que pasa por el centro y el punto de tangencia es $\perp$ a la tangente".

Y $\beta = 1\angle$ Rto…………………………………………………………………(2)

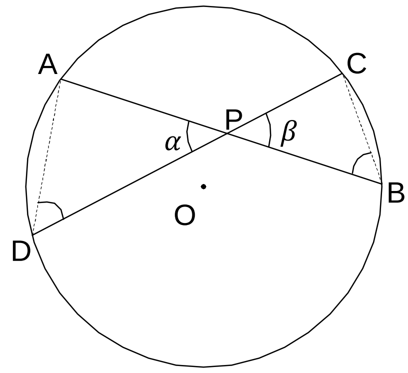
Sumando m. a m. (1) y (2) tendremos

$$\alpha + \beta = 2\angle\text{Rtos.}$$

Es decir los puntos O_1 ; P y O_2 están situados en una misma recta por ser semirrectas opuestas.

Luego $O_1\,O_2$ pasa por el punto P .

TEOREMA: **Si dos rectas secantes se cortan en un punto interior de una circunferencia, el producto de los segmentos determinados en una de las cuerdas, es igual al de los determinados en la otra.**



H) AB y CD rectas secantes que se cortan en P.
P punto interior a la Cia O

T) $\overline{AP} \times \overline{PB} = \overline{CP} \times \overline{PD}$

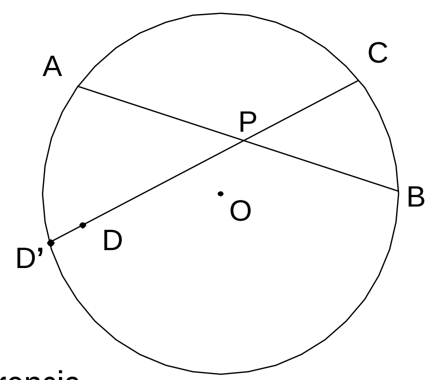
D) Trazando los segmentos $\overline{AD}$ y $\overline{CB}$ y considerando los siguientes triángulos.

$$\overset{\triangle}{APD} - S - \overset{\triangle}{CPB} \ldots\ldots\ldots\ldots \begin{cases} \overset{\angle}{\alpha} = \overset{\angle}{\beta} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{Ángulos opuestos por el vertice.} \\ \overset{\angle}{D} = \overset{\angle}{B} \ldots \text{Porque ambos son igual } \frac{1}{2}\,\overset{\frown}{AC} \text{ por ser inscriptos.} \\ \text{Semejanza de triangulos; 2 angulos respectivamente iguales.} \end{cases}$$

Luego podemos escribir: $\dfrac{\overline{PD}}{\overline{AP}} = \dfrac{\overline{PB}}{\overline{PC}}$

O lo que es lo mismo $\overline{AP} \times \overline{PB} = \overline{PD} \times \overline{PC}$ Que es la tesis.

TEOREMA: **Si en dos rectas que se cortan, se tienen cuatro segmentos de extremos comunes y tales que el producto de dos de ellos contenidos en una de las rectas es igual al de los otros dos contenidos en la otra recta, por los extremos no comunes pasa una circunferencia.**



H) Sean AB y CD dos rectas que se cortan en P

$\overline{AP} \times \overline{PB} = \overline{CP} \times \overline{PD}$

T) Por los puntos A, B, C y D pasa una circunferencia.

D) Sabemos que por tres puntos no colineales pasa una circunferencia.

Luego por A, B y C pasa una circunferencia y suponiendo que esta no pase por el punto D y que pase por el punto D’.

Entonces tendríamos:

$\overline{CP} \times \overline{PD'} = \overline{AP} \times \overline{PB}$ ....(1)

Pero $\overline{AP} \times \overline{PB} = \overline{CP} \times \overline{PD}$ ....(2) por hipótesis.

Luego $\overline{CP} \times \overline{PD'} = \overline{CP} \times \overline{PD}$ ....Propiedad transitiva de igualdad

O mejor $\overline{PD'} = \overline{PD}$ .... Por tanto D y D’ coinciden.

Entonces por A , B , C y D pasa una circunferencia.

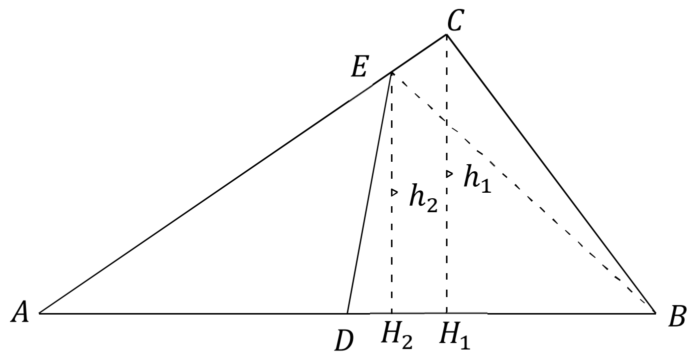
TEOREMA: **Las áreas de superficie de dos triángulos que tienen un ángulo igual, son entre sí como los productos de los lados que comprenden ese ángulo.**

H) Sean $\overset{\triangle}{ABC}$ y $\overset{\triangle}{ADE}$ dos triángulos que tienen en común el ángulo $\overset{\angle}{A}$

Área de $\overset{\triangle}{ABC} = A_1$

Área de $\overset{\triangle}{ADE} = A_2$

T) $\boxed{\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{\overline{AB}\,.\,\overline{AC}}{\overline{AD}\,.\,\overline{AE}}}$



D) Trazando la recta BE quedan determinados los triángulos $\overset{\triangle}{ABE}$ y $\overset{\triangle}{ADE}$ que tienen la misma altura h_2

Sea área de $\overset{\triangle}{ABE} = A_3$

Tenemos:

$$A_2 = \frac{\overline{AD}\,.h_2}{2}$$

$$A_3 = \frac{\overline{AB}\,.h_2}{2}$$

Que dividiendo m.a.m. obtenemos $\dfrac{A_2}{A_3} = \dfrac{AD}{AB}$ .... (1)

Considerando los triángulos $\overset{\triangle}{ABE}$ y $\overset{\triangle}{ABC}$ tienen la misma base $\overline{AB}$

$$\left.\begin{array}{l} A_1 = \dfrac{\overline{AB}\,.h_1}{2} \\ A_3 = \dfrac{\overline{AB}\,.h_2}{2} \end{array}\right\}$$ ....dividiendo m.a.m. y simplificando

$\dfrac{A_1}{A_3} = \dfrac{h_1}{h_2}$ .... (2)

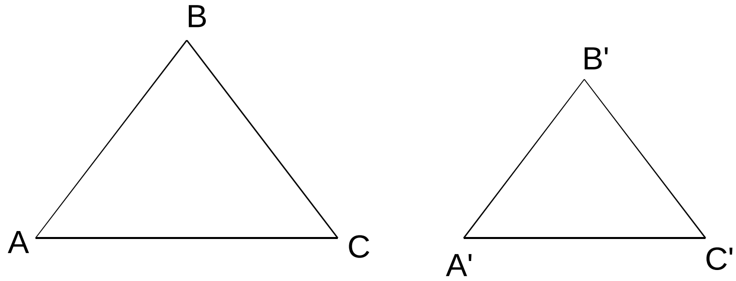
Dividiendo m.a.m. (2) y (1) $\dfrac{\frac{A_1}{A_3}}{\frac{A_2}{A_3}} = \dfrac{\frac{h_1}{h_2}}{\frac{AD}{AB}}$

Tendremos: $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{AD}} \cdot \dfrac{h_1}{h_2}$ .... (3)

Considerando $\overset{\triangle}{ACH_1}$ —S— $\overset{\triangle}{AEH_2}$ .... $\dfrac{AC}{AE} = \dfrac{h_1}{h_2}$ .... en (3)

Tendremos:.. $\boxed{\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{\overline{AB}\,.\,\overline{AC}}{\overline{AD}\,.\,\overline{AE}}}$ ....Que es la tesis.

TEOREMA: **Las áreas de dos triángulos semejantes, son entre sí como los cuadrados de dos lados homólogos cualesquiera.**



H) $\overset{\triangle}{ABC}$ —S— $\overset{\triangle}{A'B'C'}$

Área de $\overset{\triangle}{ABC} = A_1$

Área de $\overset{\triangle}{A'B'C'} = A_2$

T) $\boxed{\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{\overline{AB}^2}{\overline{A'B'}^2}}$

D) Puesto que los triángulos son semejantes $\overset{\angle}{A} = \overset{\angle}{A'}$

y podemos escribir:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{\overline{A'B'} \cdot \overline{A'C'}}$$ .... (1)............ $\left\{\right.$ Las áreas de dos triángulos que tienen un ángulo igual son entre sí como los productos de los lados de dicho ángulo.

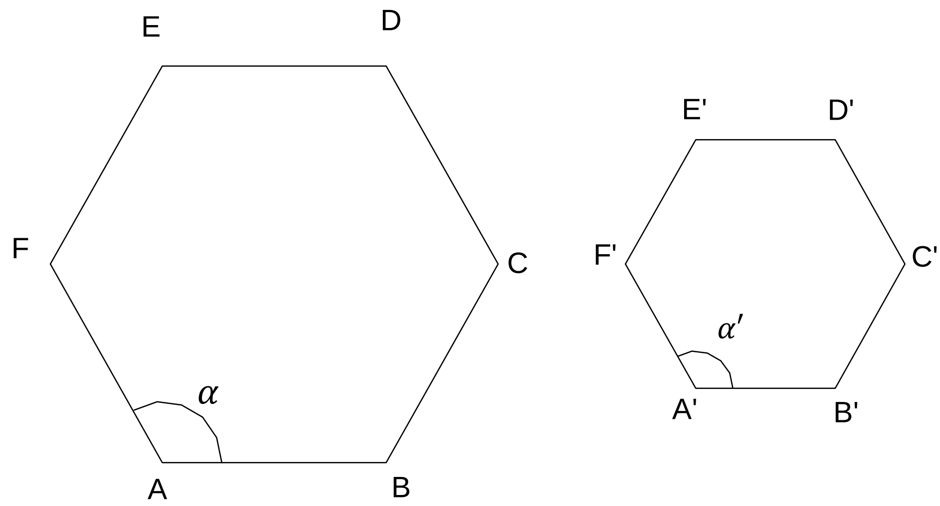
Pero por semejanza de triángulos

podemos escribir: $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}$ ....Que llevando en (1)

Tendremos $$\frac{A_1}{A_2} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AB}}{\overline{A'B'} \cdot \overline{A'B'}}$$

o $\boxed{\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{\overline{AB}^2}{\overline{A'B'}^2}}$ .... la tesis.

TEOREMA: Dos polígonos regulares de un mismo número de lados son semejantes.



H) Los polígonos son regulares y tienen el mismo número de lados n.

T) Los polígonos son semejantes.

D) Sabemos por geometría plana.

$\alpha = \dfrac{2\angle \text{Rtos}.(n-2)}{n}$ ....El ángulo interno de un polígono convexo regular de n lados.

$\alpha' = \dfrac{2\angle \text{Rtos}.(n-2)}{n}$ ....Por idéntico motivo.

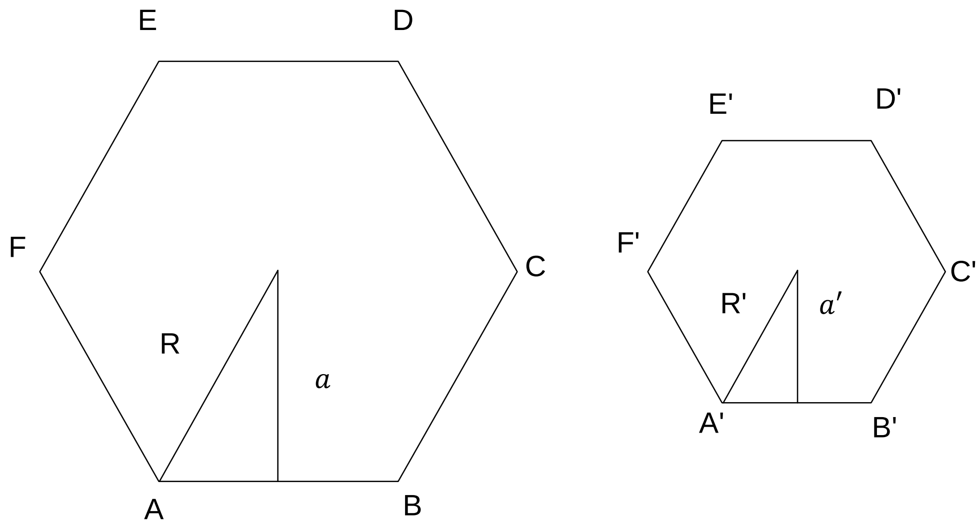
Luego $\overset{\angle}{\alpha} = \overset{\angle}{\alpha'}$

Además $\left\{ \begin{array}{l} \overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DE} = \overline{EF} = \overline{FA} \\ \overline{A'B'} = \overline{B'C'} = \overline{C'D'} = \overline{D'E'} = \overline{E'F'} = \overline{F'A'} \end{array} \right\}$ Polígonos regulares.

Dividiendo miembro a miembro.................... $\dfrac{\overline{AB}}{A'B'} = \dfrac{\overline{BC}}{B'C'} = \dfrac{\overline{CD}}{C'D'} = \dfrac{\overline{DE}}{D'E'} = \dfrac{\overline{EF}}{E'F'} = \dfrac{\overline{FA}}{F'A'}$

$\therefore$ Los polígonos son semejantes.

TEOREMA: **Los perímetros de dos polígonos regulares de un mismo número de lados, son entre sí como los radios o las apotemas respectivamente.**



H) Los polígonos son regulares y del mismo número de lados.

Sean P y P' los perímetros respectivos.

R y R' los radios respectivos.

a y a' los apotemas respectivos.

T) $\boxed{\dfrac{P}{P'} = \dfrac{R}{R'} = \dfrac{a}{a'}}$

D) los polígonos dados serán semejantes por ser regulares y por tener el mismo número de lados.

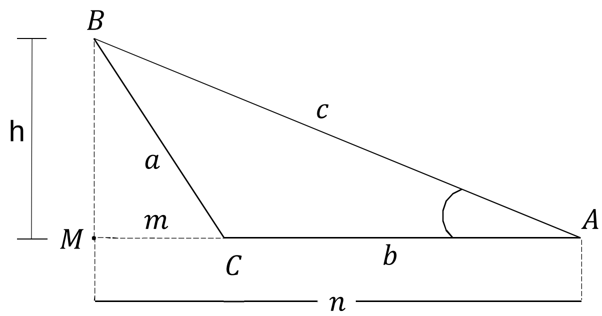
Luego: $$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{C'D'}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{D'E'}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{E'F'}} = \frac{\overline{FA}}{\overline{F'A'}} = \frac{R}{R'} = \frac{a}{a'}$$

Aplicando la propiedad de las proporciones: "En toda serie de razones iguales la suma de los antecedentes es a la suma de los consecuentes como un antecedente es a su consecuente"

Luego: $$\frac{\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DE} + \overline{EF} + \overline{FA}}{\overline{A'B'} + \overline{B'C'} + \overline{C'D'} + \overline{D'E'} + \overline{E'F'} + \overline{F'A'}} = \frac{R}{R'} = \frac{a}{a'}$$

Entonces: $\boxed{\dfrac{P}{P'} = \dfrac{R}{R'} = \dfrac{a}{a'}}$ Que es la tesis.

TEOREMA: **En todo triangulo el cuadrado del lado opuesto a un ángulo agudo es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados, menos el duplo de uno de ellos por la proyección del otro sobre él.**



H) $\overset{\Delta}{ABC}$ triangulo cualquiera.

$\overset{\angle}{A}$......................ángulo agudo

a ....lado opuesto.

$\bar{n}$ Proyección del lado c sobre el lado b.

T) $\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.n}$

D) En el $\overset{\Delta}{BMA}$ tenemos: $h^2 + n^2 = c^2$..(1)

En el $\overset{\Delta}{BMC}$ tenemos: $h^2 + m^2 = a^2$..(2)

O también $h^2 = a^2 - m^2$..(3)

(3) en (1).......................................$a^2 - m^2 + n^2 = c^2$

O también: $a^2 = c^2 + m^2 - n^2$..(4)

En el grafico podemos ver.

$m + b = n \longrightarrow m = n - b$ Elevando al cuadrado.

Luego: $m^2 = (n - b)^2 = (b - n)^2$

O .... $m^2 = b^2 - 2bn + n^2$......................................(5)

(5) en (4) tendremos:

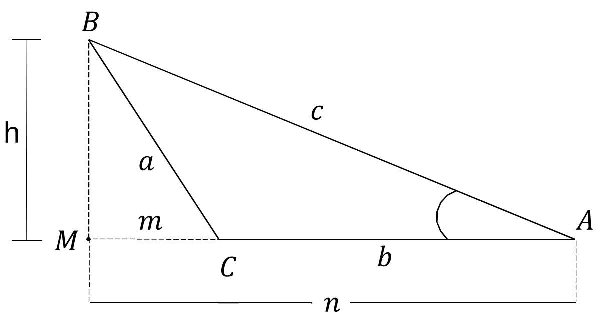
$a^2 = c^2 + b^2 - 2bn + n^2 - n^2$

$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bn}$.................................. Que es la tesis

OBS: Este teorema es importante y debemos asociar con el teorema del coseno en trigonométria.

El segmento $\bar{n} = c \,.\, \cos \overset{\angle}{A}$

TEOREMA : **En todo triangulo el cuadrado del lado opuesto a un ángulo obtuso, es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados más el duplo de uno de ellos por la proyección del otro sobre él.**



H) $\overset{\Delta}{ABC}$ triangulo cualquiera.

$\overset{\angle}{C}$ ....ángulo obtuso

c......... lado opuesto.

$\overline{n}$........proyección de c sobre el lado b.

T) $c^2 = a^2 + b^2 + 2.b.m$

D) En el $\overset{\Delta}{BMC}$..................................$c^2 = h^2 + n^2$..(1)

Pero .... $n = b + m$

Elevando al cuadrado tenemos: $n^2 = b^2 + 2bm + m^2$.................................(2)

(2) en (1)......................................$c^2 = h^2 + b^2 + 2bm + m^2$..........................(3)

En $\overset{\Delta}{CMB}$ ....$h^2 = a^2 - m^2$..(4)

(4) en (3) tendremos:

$c^2 = a^2 - m^2 + b^2 + 2bm + m^2$

$c^2 = a^2 + b^2 + 2.b.m$ ....Que es la tesis.

OBS: Nuevamente aparece la asociación con el teorema del coseno.

$$a\,.\cos \overset{\angle}{C} = -m$$

Debido a que el coseno de un ángulo obtuso es negativo, cambia el signo y pasa a positivo.

OBSERVACION IMPORTANTE:

Si aplicamos este teorema a un triángulo rectángulo llegaremos al teorema de Pitágoras.

1) En un triangulo $\overset{\Delta}{ABC}$, AB = 6,5 ; CA = 6 ; BC = 7 . Calculese los segmentos de $\overline{AB}$ determinados por la bisectriz del ángulo C. Rta.: 3 y 3,5

2) Los perímetros de dos polígonos semejantes son 18 y 14m. Si uno de los lados del uno es de 3m. ¿Cuál es el largo de su homólogo en el otro? Rta.: $\frac{7}{3}$ m

3) El perímetro de un triángulo equilátero es 51m. Hállese el lado de un triángulo equilátero cuya altura sea la mitad de la del anterior. Rta.: $\frac{17}{2}$ m

4) El perímetro de un rectángulo es 48dm y dos lados adyacentes están en la relación 5 a 7. Hállese los lados. Rta.: a = 10 ; l = 14

5) Hallar el área de un hexágono regular, sabiendo que su lado l =10 mtrs.

Rta.: $150\sqrt{3}\ m^2$

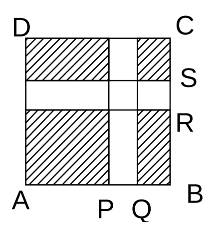
6) Hallar el lado de un hexágono regular, sabiendo que su área es A=127,31 dm^2.

Rta.: l = 7 dm

7) El perímetro de un rectángulo es 48 cm y la longitud de la base es el doble de la altura. ¿Cuál es el área del rectángulo? Rta.: A = 128 cm^2

8) La figura de la derecha ABCD es un cuadrado de lado $\overline{AB}$ = 40 m. y $\overline{PQ}$ = $\overline{RS}$ = 8m.

Determine el área de la región sombreada.

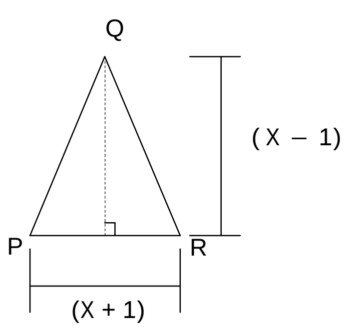


Rta.: A = 1024 m^2

9) Una piscina cuadrada de 12 m de lado se encuentra rodeada de un andén de 2m de ancho. Determinar el área del andén.

Rta.: A = 112 m^2

10) Si el área del triangulo $\overset{\Delta}{PQR}$ de la figura es 42 m^2. Determinar el perímetro.



Rta.: P = 29,57 m

11) Hallar la longitud de un arco cuyo ángulo central es $\alpha = 60°$ que pertenece a una Cía. cuyo radio es 4 mtrs.

Rta.: $\overset{\frown}{AB} = \frac{4}{3}\pi$

12) Hallar el área de un sector circular cuyo ángulo central es 30 que pertenece a una cia cuyo radio es r= 3 cm.

Rta.: A = $\frac{3}{4}\pi\ cm^2$

13) Los ángulos de un pentágono miden x , 2x , 3x , 3x y 3x . Calcular sus valores.

Rta.: x = 45 ; 2x = 90 ; 3x = 135

14) El perímetro de un rombo mide 60 dm, sus diagonales son entre sí como 3 es a 4. Determinar el área.

Rta.: A = 216 dm^2

15) Determinar la apotema del hexágono regular de 48 m de perímetro.

Rta.: Ap. = $4\sqrt{3}$ m

16) Determinar la altura del trapecio rectángulo, cuyas bases miden respectivamente 4,5 dam y 7,5 dam y cuyo lado oblicuo es de 6 dam.

Rta.: h =$3\sqrt{3}$ dam

17) Hallar la longitud de la cia inscripta en el triángulo equilátero de 12 m de perímetro.

Rta.: Cia.= $\frac{4}{3}\pi\sqrt{3}$ m

18) Hallar el área de un trapecio isósceles de 70 m de perímetro, sabiendo que las bases miden respectivamente 10 m y 26 m.

Rta.: A = 270 m^2

19) Determinar el área de la corona circular determinado por las circunferencias inscriptas y circunscriptas al cuadrado de área igual a 64 cm^2.

Rta.: 16 $\pi\ cm^2$

20) Determinar el área de un rectángulo cuya base es el triple de la altura, y sabiendo que si se aumenta cada dimensión en 90 cm, el área aumentara 11,97 m^2.

Rta.: A= 28,83 m^2

21) Establecer la relación entre las áreas de dos cuadrados, sabiendo que el lado del primero es igual a la diagonal del segundo.

Rta.: $\frac{A}{A'} = 2$ ó $A = 2A'$

22) Determinar el área comprendida entre tres cias tangentes exteriores, cuyos centros distan entre si 6 m. Obs.: Las tres cias son iguales.

Rta.: $\frac{18\sqrt{3} - 9\pi}{2}$

23) Determinar el perímetro del triángulo equilátero equivalente a un rombo cuyas diagonales miden respectivamente 8 y 6 m.

Rta.: P = 22,33 m

24) La base de un rectángulo equivalente a un cuadrado de 20 m de lado es el doble de la altura. Determinar el perímetro del rectángulo. Rta.: $P = 60\sqrt{2}$m

25) Determinar la longitud de la cia cuyo círculo es equivalente a un hexágono regular de 2 m de apotema. Rta.: $4\sqrt[4]{108}\ m$

26) ¿Cuantas baldosas de forma octogonal (octógono regular) de 29,8 cm de lado y 37 cm de apotema se necesitan para embaldosar un pasaje peatonal de 551,3 m de largo por 8 m de ancho? Rta.: 10.000

27) Hallar la longitud del lado del triángulo equilátero, cuya altura es los dos tercios de la altura de otro triangulo también equilátero de 60 cm de perímetro.

Rta.: $l = \frac{40}{3}$

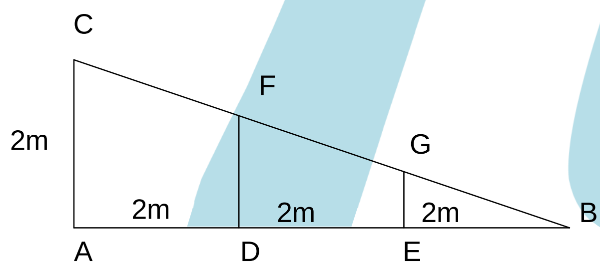
28) Calcular el área de un triángulo rectángulo sabiendo que la altura relativa a la hipotenusa determina sobre esta, segmento que miden 4 dm y 9 dm. Rta.: A= 39 dm^2

29) Las dimensiones y la diagonal de un rectángulo están en progresión aritmética. Determinar las mismas sabiendo que el perímetro del rectángulo es igual a 42m.

Rta.: a = 9m ; l = 12m ; D = 15 m

30) La base de un rectángulo excede a la altura en 3 m y la diagonal a la base en 4 m. Calcular las dimensiones de dicho rectángulo. Rta.: a = 11,48m ; l = 14,48m ; D = 18,48 m

31) En la figura $\overline{AC}$, $\overline{DF}$ y $\overline{EG}$ son perpendiculares a $\overline{AB}$. Determinar las longitudes de $\overline{DF}$, $\overline{EG}$, $\overline{AF}$, $\overline{DG}$ y $\overline{BC}$.



Rta.: $\overline{DF} = \frac{4}{3}$m ; $\overline{EG} = \frac{2}{3}$m ; $\overline{AF} = \frac{2\sqrt{13}}{3}$m ;

$\overline{DG} = \frac{2\sqrt{10}}{3}$m y $\overline{BC} = 2\sqrt{10}$m

32) La longitud de la cia inscripta en un triángulo equilátero mide 50,24 dm. Calcular el perímetro de dicho triangulo. Rta.: P = 48 $\sqrt{3}$ dm

33) Determinar en qué relación están los diámetros D_1 y D_2 de dos círculos de áreas respectivas A_1 y A_2. Rta.: $\frac{D_1}{D_2} = \frac{\sqrt{A_1}}{\sqrt{A_2}}$

34) Las longitudes de las cias de dos círculos, están en la relación de 2 a 3. ¿En que relación están las áreas de los círculos respectivos? Rta.: $\frac{A_1}{A_2} = \frac{4}{9}$

35) El área de una corona circular es igual a 50,24 dm^2. La diferencia de los radios es igual a 2 dm. Calcular los diámetros respectivos. Rta.: D_1 = 10 , D_2 = 6

36) Calcular el área del triángulo cuyos vértices son los extremos de una cuerda de longitud igual a 40 dm y el centro de la cia de longitud igual a 182,12 dm.

Rta.: A = 420 dm^2

37) Calcular el radio de una cia., sabiendo que si se disminuye en 1 cm, el área disminuye en $1cm^2$.

Rta.: R = $\frac{1+\pi}{2\pi}cm$

38) Calcular el perímetro y el área de un cuadrado, sabiendo que la diagonal y el lado suman 25,36m.

Rta.: A=110,34 m^2 ; P = 42,01 m

39) Si la altura de un rectángulo dado se aumenta en un tercio de su longitud y la base en un quinto de su longitud, la relación entre estas nuevas dimensiones es igual a tres octavos. Sabiendo que dicha relación se mantiene al aumentar la altura y la base en 6 m, calcular el área del rectángulo dado.

Rta.: A= 3375m^2

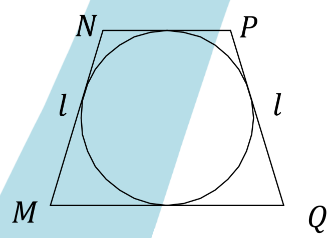
40) La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 17 m. El cuadrado construido sobre uno de los catetos tiene por área 161 m^2 más que la del cuadrado construido sobre el otro cateto. Hallar cuanto mide cada cateto.

Rta.: a = 17 ; b =15 ; c = 8

41) Las longitudes de dos cias tangentes exteriormente son de 18,84m y 75,36m respectivamente. Calcular el área del trapecio rectángulo determinado por la recta de los centros, la tangente externa común y las rectas que pasan por los respectivos centros y los correspondientes puntos de tangencia.

Rta.: 90m^2

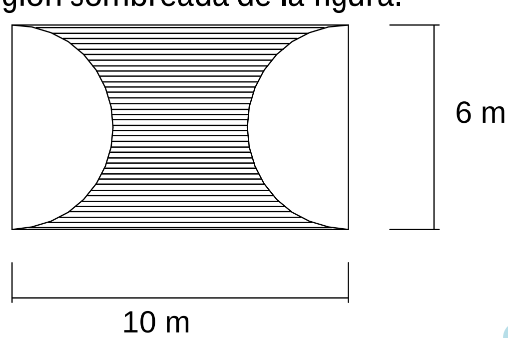
42) Calcular las bases de un trapecio isósceles circunscripto a una cia de 12 dm de diámetro, sabiendo que el área del trapecio es de 180 dm^2



Rta.: B = 15 + 3 $\sqrt{21}$; b = 15 – 3 $\sqrt{21}$

43) Calcular la longitud de la cia. , cuyo círculo es equivalente al hexágono regular de 1,50 m de apotema.

44) Calcular el área de la región sombreada de la figura.



Rta.: A = 31,74 m^2

45) Cuatro ángulos consecutivos con vértices en un punto y pertenecientes a un mismo semiplano respecto a una recta que pasa por dicho punto, están en progresión aritmética, el menor mide 30°. Determine cuanto miden los tres restantes.

46) En un triángulo rectángulo, la mediana trazada a partir del ángulo recto, forma con la hipotenusa dos ángulos que son entre sí como 7 es a 13. Calcular los ángulos agudos del mismo.

Rta.: a = 58,5 ° ; b = 31,2°

47) En un triángulo isósceles el ángulo opuesto a la base es de 36°. Verificar si se traza una bisectriz de uno de los ángulos de la base, el triángulo queda dividido en dos triángulos isósceles.

48) Determinar el polígono regular cuyo ángulo mide 150°

Rta.: Dodecagono

49) Calcular el radio de un arco de cia de 1658 m de longitud, sabiendo que su ángulo central correspondiente mide 47° 30' 56''.

50) La distancia entre dos cias concéntricas es igual a 4m, siendo la longitud de la cia menor igual a 18,84m. Calcular la cia mayor.

Rta.: 43,96

51) La distancia entre los centros de dos cias es igual a 10,50 mtrs. , sus longitudes respectivas miden 51,496 mtrs. y 14,444 mtrs. Determinar la posición relativa de las mismas.

Rta.: tangentes

52) Los lados de un triángulo rectángulo son entre si como los números 3 , 4 , 5. Si el perímetro de dicho triangulo es 36 mtrs, determinar el valor de cada uno de los lados.

Rta.: 9 ; 12 ; 15

53) Uno de los catetos de un triángulo rectángulo mide 60 cm y la hipotenusa excede al otro cateto en 20cm. Calcular cuánto mide la hipotenusa y el otro cateto.

Rta.: hip.= 100 ; cat.= 80

54) Determinar la distancia entre las cias inscriptas y circunscriptas a un cuadrado de 44 cm de perímetro.

55) Determinar el área de un rectángulo circunscrito a un rombo con vértices en los puntos medios de los lados de aquel. Las diagonales del rombo son entre sí como 4 es a 3 y su perímetro es 400 cm.

Rta.: A= 19.200 cm^2

56) Sean P y p los perímetros de dos cuadrados. Establecer la relación entre las áreas en función de dichos perímetros.

Rta.: $\frac{A_1}{A_2} = \frac{P^2}{p^2}$

57) Calcular el área comprendida entre dos cuadrados concéntricos cuyos lados distan entre si 2,50 mtrs. Siendo la longitud de la cia inscripta al menor de 37,68 mtrs.

Rta.: A= 52 m^2

58) Hallar la distancia entre dos cias concéntricas, sabiendo que el área del hexágono regular inscripto en la mayor y circunscripto a la menor es 93,42 dm^2

59) Calcular el área comprendida entre un hexágono regular de 61,50 dm de perímetro y el círculo circunscripto a dicho hexágono.

60) La superficie de un rombo es igual a la de un triángulo de 12 cm de base y 7 cm de altura, y una diagonal del rombo es igual a $\frac{1}{2}$ de la base del triángulo. Calcular la otra diagonal.

Rta.: D = 14 cm

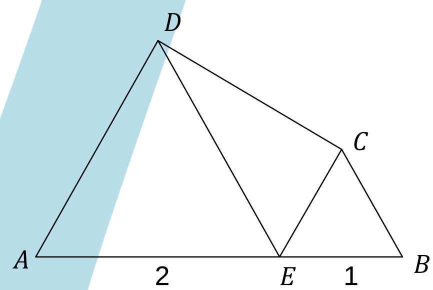
61) ¿Cuál es la relación entre las superficies de dos rombos, sabiendo que las diagonales del primero son respectivamente la mitad de las diagonales del segundo?

Rta.: 1/4

62) Calcular el área del cuadrilátero $ABCD$, siendo $\overset{\Delta}{ADE}$ y $\overset{\Delta}{ECB}$ triángulos equiláteros.

$\overline{AE}$ = 2 m

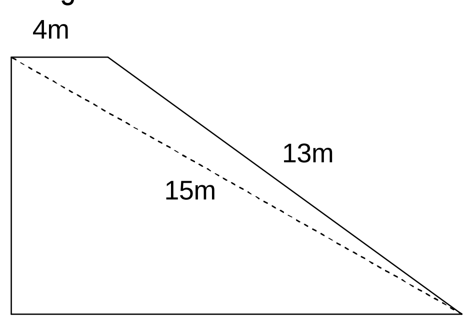
EB = 1 m



Rta.: $A = \frac{7}{4}\sqrt{3}\ m^2$

63) El radio del circulo inscripto en un triángulo rectángulo mide 4 cm y uno de los catetos 40 cm. Hallar el área del triángulo.

64) Calcular el área del trapecio de la figura.



Rta.: A = 78 m^2

65) La diferencia entre las dos bases de un trapecio es de 6 m la diferencia entre la base mayor y la altura es de 10 m ; la suma de la otra base y la altura es de 14 m. Calcular el área del trapecio.

Rta.: A= 60m^2

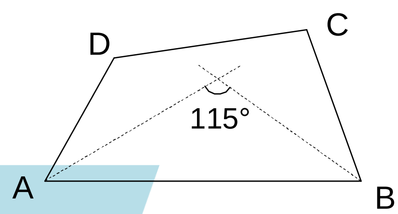
66) La perpendicular trazada del vértice del ángulo recto A, a la hipotenusa de un triángulo rectángulo forma con uno de los catetos un ángulo α =25°. Determinar el valor de los ángulos agudos del triángulo.

Rta.: 25° ; 65°

67) El valor de uno de los ángulos iguales de un triángulo isósceles es los tres quinto del ángulo desigual. Calcular el valor de los ángulos del triángulo.

68) En un triangulo $\overset{\Delta}{ABC}$, los ángulos $\overset{\angle}{B}$ y $\overset{\angle}{C}$ miden respectivamente 60° 30' y 19° 15'. Hallar el valor del ángulo que forman la altura y la bisectriz trazados del vértice A.

69) En el cuadrilátero de la figura , el ángulo formado por las bisectrices de los ángulos $\overset{\angle}{A}$ y $\overset{\angle}{B}$ mide 115°. Hallar el valor de la suma de los ángulos $\overset{\angle}{C}$ y $\overset{\angle}{D}$.



Rta.: 230°

70) Determinar el número de lados del polígono, sabiendo que la suma de sus ángulos es igual a 1080°.

Rta.: 8

71) Determinar el polígono regular cuyo ángulo mide 144°.

Rta.: decágono

72) Un polígono regular tiene tres lados más que otro polígono regular y los ángulos de aquel tienen 27° más que este. Determinar dichos polígonos.

Rta.: pentágono y octágono

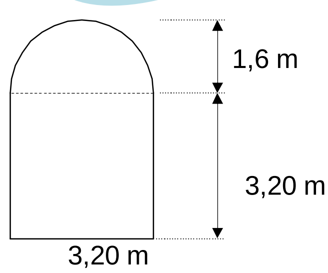
73) Determinar el polígono regular, cuyo ángulo numéricamente es igual a ocho veces el número de lados más dos.

Rta.: icosogono

74) Determinar el perímetro de la figura.

Calcular también el área

Rta.: P= 22,848m ; A= 18,2784 m^2



75) Determinar la distancia entre los centros de dos cias tangentes exteriormente, sabiendo que las longitudes respectivas miden 12,56 m y 50,24m

Rta.: 10 m

76) Los cuadrados de los lados de un triángulo rectángulo son entre sí como los números 1 , 2 y 3. Calcular la longitud de los catetos, sabiendo que la hipotenusa mide 6 dm.

77) El cuadrado construido sobre el cateto de un triángulo rectángulo mide 49 m^2 y el área del triángulo equilátero construido sobre el otro cateto es $4\sqrt{3}\ m^2$. Calcular el área del cuadrado construido sobre la hipotenusa.

Rta.: 65 m^2

78) La base de un triángulo isósceles mide 1m y su altura respectiva 45cm. La base homologa de un triángulo semejante al primero es de 12cm. Hallar la medida que corresponde a la altura de esta última.

79) La cia de un círculo es 3 veces la de otro. ¿Cuál es la relación de los cuadrados construidos sobre los dos radios?

80) Hállese el perímetro y el área de un octógono regular inscripto en un círculo de 16 m de radio.

81) En un paralelogramo ABCD ; la base AB = 18m y la altura h = 12 m. uniendo un vértice con el punto medio de los lados opuestos queda divido en tres partes. Calcular el área de cada uno.

Rta.: $A_1 = 54$; $A_2 = 54$; $A_3 = 108$

82) Por un punto P exterior a un círculo, se traza una recta secante a su circunferencia, tal que en ella quede determinada una cuerda de 6m. Sabiendo que la distancia de P al punto de intersección más alejada es de 12m. Hallar la longitud de la tangente trazada por *P* a dicha cia. Graficar

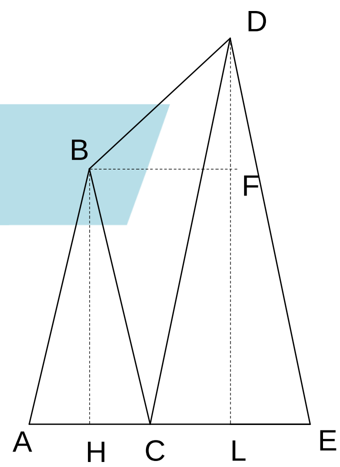
Rta.: $6\sqrt{2}$

83) Dos triángulos isósceles $\overset{\triangle}{ABC}$, $\overset{\triangle}{CDE}$ (figura) tienen las bases $\overline{AC}$ =6m CE =8m sobre una misma línea recta y el punto C de estas dos bases es común a los lados

$\overline{AB} = \overline{BC} = 10$m

$\overline{CD} = \overline{DE} = 15$m

Calcular el perímetro y el área del cuadrilátero ABDE.

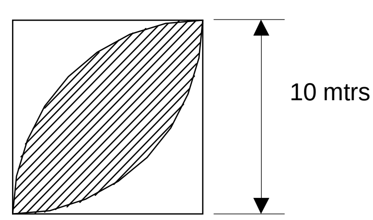


Rta.: P= 47,55 m ; A= 130,722 m^2

84) En qué relación están las áreas del triángulo equilátero y del hexágono regular inscripto en una misma cia.

Rta.: 1/2

85) Dado un cuadrado ABCD (Figura) cuyo lado mide 10mtrs. desde dos vértices opuestos, con un radio igual a 10 mtrs, se describen dos arcos de círculo que por sus intersecciones determinan una figura llamada NAVETA. Calcular el área de dicha naveta.



86) El lado de un triángulo equilátero mide 2 dm. Calcular el ángulo en grados, minutos y segundos sexagesimales, de un sector circular de 1dm de radio equivalente al triangulo dado.

Rta.: 198° 34' 44,66"

87) Un trapecio isósceles tiene un ángulo de 45° , la base menor de 85m y un área de 2750 m^2. Calcular su perímetro.

Rta.: $220 + 50\sqrt{2}$

88) Dada una cia de centro O y radio R = 0,60 mtrs. , y un punto C fuera de ella, pero tal que $\overline{OC}$ =2R. Si trazamos la tangente $\overline{CD}$. Se desea conocer.

a) La longitud de esa tangente.

b) El área del triangulo $\overset{\triangle}{COD}$.

Rta.: a) $\frac{3}{5}\sqrt{2}$; b) $\frac{9}{50}\sqrt{2}$

89) El radio de un círculo es $\frac{5}{2}$ del de otro. Si el área del círculo menor es de 15,2 cm^2. Calcular el área del círculo mayor.

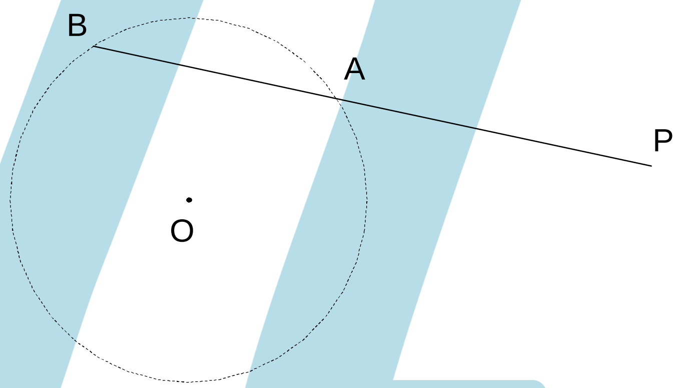
Rta.: $\frac{121}{4}\pi\ cm^2$

90) Determinar el perímetro del triángulo equilátero equivalente al rombo cuyas diagonales miden 8m y 6m.

91) Calcular el área del círculo circunscripto al hexágono regular de área igual a $6\sqrt{3}\ cm^2$.

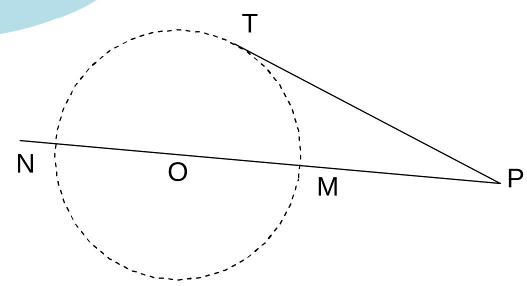
Rta.: $4\,\pi\ cm^2$

92) Por un punto P exterior a un circulo de centro O y radio igual a 5 cm , se traza la secante $\overline{PAB}$ tal que $\overline{PA}$ = 9 cm y $\overline{AB}$ = 7 cm. Hallar la distancia $\overline{OP}$.



Rta.: OP = 13

93) Por un punto exterior a un circulo de centro O y radio igual a 7,50 cm , se trazan la tangente $\overline{PT}$ y la secante $\overline{PMON}$ a su circunferencia. Calcular la distancia $\overline{PM}$, sabiendo que $\overline{PT}$ = 10 cm.



Rta.: $\overline{PM}$ = 5 cm

94) La longitud de un arco de cia de 10 cm de diámetro es de $\frac{27\,\pi}{8}$ cm. Calcular el arco en el sistema sexagesimal.

Rta.: 121° 30'

95) Por un punto exterior a un círculo se trazan una recta secante PAB y una tangente PT a su cia. (A , B y T son puntos de la cia). Sabiendo que $\overline{AB}$ = 2m, $\overline{PT}$ = 4m. calcular la longitud de $\overline{PB}$.

Rta.: $1 + \sqrt{17}$

96) La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 17m. el cuadrado construido sobre uno de los catetos tiene por área 161 m^2 más que el del cuadrado construido sobre el otro cateto. Calcular la longitud de cada cateto.

Rta.: 15 ; 8

97) La diferencia entre las áreas de un cuadrado y el circulo inscripto en él es de 0.86 m^2. Calcular esas áreas. (considerar π = 3,14).

Rta.: 4 y 3,14

98) El área de una corona circular es igual a 50,24 dm^2 y la diferencia de sus radios es igual a 2 dm. Calcular las longitudes de las cias.

Rta.: 18,84 y 31,4

99) Al aumentar en 2 dm el radio de un círculo, su área aumenta en 15 dm^2. Hallar el radio del círculo.

Rta.: $\frac{689}{314}$

100) Por un punto P exterior a un circulo se traza una recta secante $\overline{PAB}$ a su circunferencia tal que $\overline{PB}$ = 18,50 m y una tangente PT = 9m. determinar la longitud del segmento PA y Graficar.

Rta.: $\frac{162}{37}$

Instrucciones generales sobre las demostraciones. Las instrucciones generales siguientes pueden servir de guía:

1. Dibújense las figuras con la mayor exactitud posible.
   Esto ayuda mucho, sobre todo al principio. Cuando una figura está mal dibujada, la demostración se hace a veces muy difícil.

2. Dése a las figuras la forma más general posible.
   Si, por ejemplo, se trata de investigar propiedades comunes a todos los triángulos, tómese un triángulo escaleno; pues si se escoge uno isósceles o equilátero, puede caerse en el error de creer que cuanto se aplica a éstos se aplica igualmente a otros triángulos, lo cual no es cierto.

3. Después de dibujar la figura, indíquese con precisión qué es lo que se da o supone, y qué es lo que ha de demostrarse.
   Muchas demostraciones se dificultan a causa de que el alumno no hace esta distinción con toda claridad.

4. Empréndase entonces la demostración por el método sintético, si se puede. Si no, pruébese el analítico, diciendo que la proposición es cierta si tal o cual lo es, y que ésta lo es si otra lo es, y así sucesivamente hasta llegar a una ya demostrada.

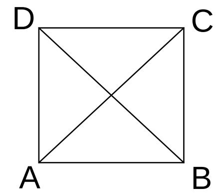
5. Si hay que demostrar la igualdad de dos rectas, trátese de demostrar que son lados homólogos de triángulos iguales, o lados de un triángulo isósceles, o lados opuestos de un paralelogramo, o segmentos comprendidos entre paralelas equidistantes.

6. Si hay que demostrar la igualdad de dos ángulos, trátese de demostrar que son ángulos alternos-internos o correspondientes formados por paralelas, u homólogos de triángulos iguales, o adyacentes a la base de un triángulo isósceles, u opuestos de un paralelogramo, o complementos de un mismo ángulo.

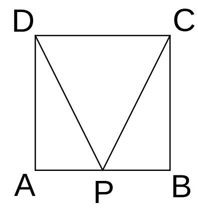
7. Si hay que demostrar que un ángulo es mayor que otro, véase si es ángulo externo de un triángulo, o si es opuesto a mayor lado que el otro ángulo.

8. Para demostrar que una recta es mayor que otra, véase si se opone a mayor ángulo en un triángulo, o si es una oblicua cuyo pie dista más que el de la otra del pie de la perpendicular.

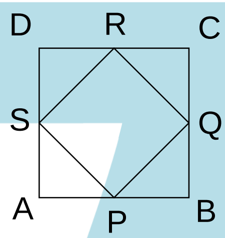
1) En el cuadrado $ABCD$, demuéstrese que $AC = BD$.



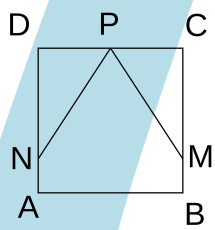
2) Si $ABCD$ es un cuadrado y P es el punto medio de AB, demuéstrese que $PC = PD$.



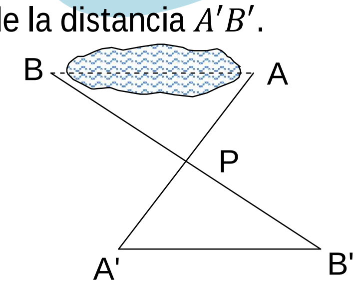
3) Los puntos P, Q, R, S son los puntos medios de los lados del cuadrado $ABCD$. Demuéstrese que $PQ = QR = RS = SP$.



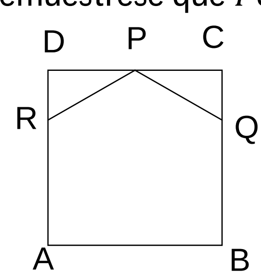
4) En el cuadrado $ABCD$, $PD = PC$ y también $AN = BM$. Demuéstrese que $PM = PN$.



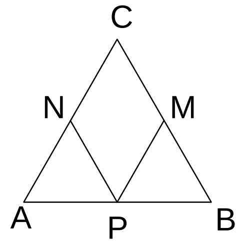
5) Demuéstrese que la distancia AB de un lado a otro de una laguna puede hallarse así: En un punto conveniente P se clava una vara o un jalón. Mirando en la dirección AP, se hace clavar una estaca en A', haciendo $PA' = PA$. De igual manera se determina B', mirando de B a P y haciendo $PB' = PB$. Después se mide la distancia $A'B'$.



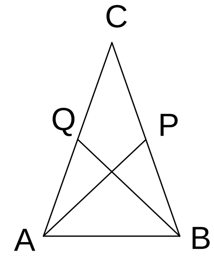
6) En el cuadrado $ABCD$, el punto P es el punto medio de DC, y PQ y PR se han trazado de modo que $\angle QPC = 30°$; $\angle RPQ = 120°$. Demuéstrese que $PQ = PR$.



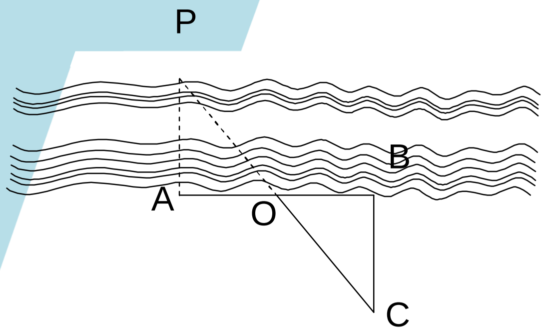
7) En el triángulo ABC, $\angle A = \angle B$. El punto P bisecta AB, y PM y PN estan trazadas de modo que $\angle BPM = \angle APN$. Demuéstrese que $BM = AN$.



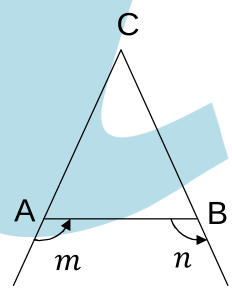
8) En el triángulo ABC, $\angle A = \angle B$, y $\angle BAP = \angle ABQ$. Demuéstrese que $AP = BQ$.



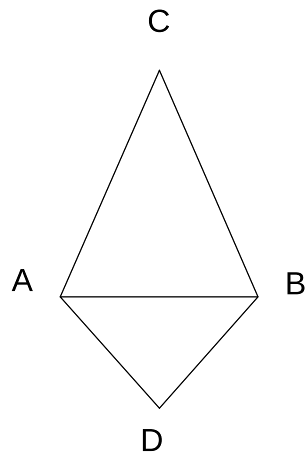
9) Para medir el ancho AP de un río se ejecutaron las operaciones siguientes: De A se midió AB en dirección perpendicular a AP. En el punto medio O de AB se clavó una estaca. En B se levantó una perpendicular a AB, y en ella se clavó una estaca en C, escogiendo este punto de suerte que quedase en línea recta con O y P. El ancho del río se determinó midiendo BC. Demuéstrese la validez del procedimiento.



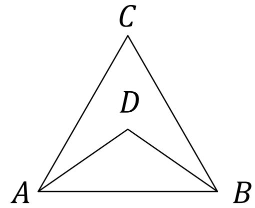
10) Suponiendo $AC = BC$, demuéstrese que los ángulos m y n son iguales.



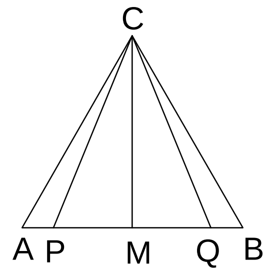
11) Demuéstrese que si en la figura $\triangle ABC$ y $\triangle ADB$ son triángulos isósceles, se traza la recta CD, $\triangle DBC = \triangle DAC$.



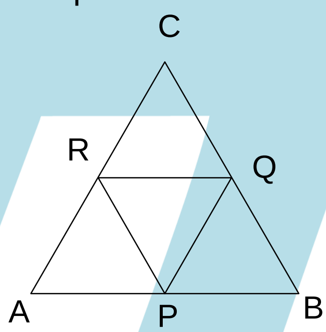
12) Demuéstrese que la recta que une los puntos C y D es la bisectriz del ángulo $\angle ADB$. Siendo $\triangle ABC$ y $\triangle ADC$ triángulos isósceles.



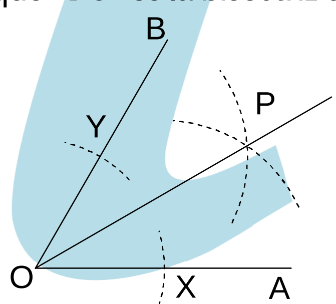
13) Demuéstrese que si en esta figura $AC = BC$, $AP = BQ$, y $PM = QM$, la recta CM es $\perp$ a PQ.



14) En la figura P, Q, R son los puntos medios de los lados del triángulo equilátero ABC. Demuéstrese que el triángulo PQR es equilátero.

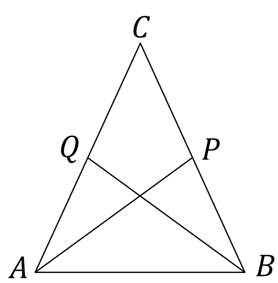


15) Trácense PX y PY, y demuéstrese que PO es la bisectriz del $\angle AOB$.

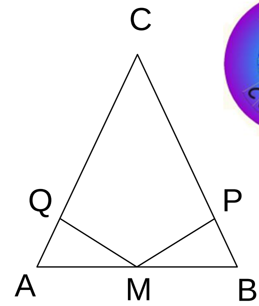


16) En un triángulo $\triangle ABC$, $AC = BC$. Si las bisectrices de los ángulos A y B se cortan en P, demuéstrese que el $\triangle ABP$ es isósceles.

17) De los vértices A y B de un triángulo equilátero se trazan rectas a los puntos medios de los lados opuestos. Demuéstrese que son iguales.

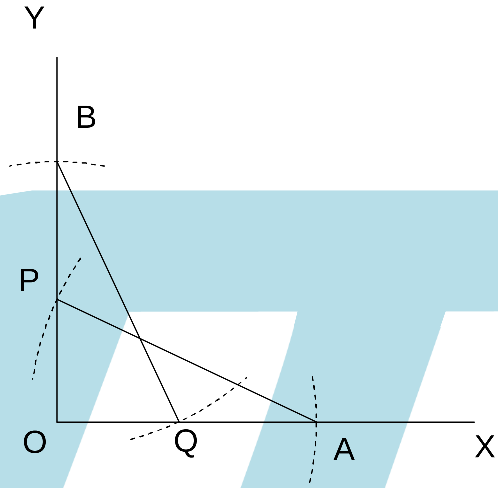


18) Demuéstrese que si las perpendiculares trazadas del punto medio M de uno de los lados AB de un triángulo ABC a los otros dos lados son iguales, los ángulos A y B también lo son. ¿Qué se sigue de aquí en cuanto a los lados AC y BC? Escríbase el enunciado general de este teorema.

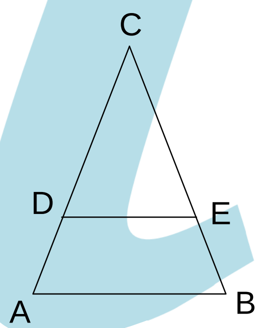


19) Demuéstrese que si las perpendiculares trazadas de los extremos de un lado de un triángulo a los otros dos lados son iguales, el triángulo es isósceles.

20) Suponiendo que OY es $\perp$ a OX. Con centro O se traza un arco que corta a OX en A y a OY en B; con centro A, un arco que corta a OY en P; y con centro B, y el mismo radio, un arco que corta a OX en Q. Demuéstrese que $OP = OQ$.

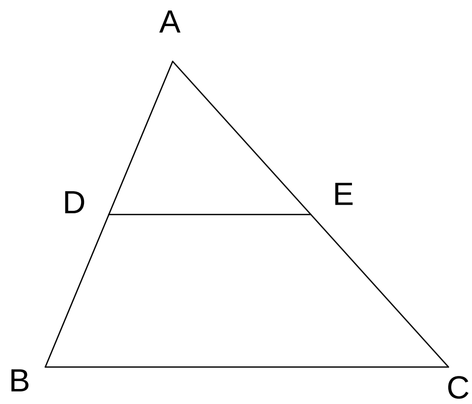


21) En el triángulo ABC, $AC = BC$, y DE es paralela a AB. Demuéstrese que $CD = CE$.

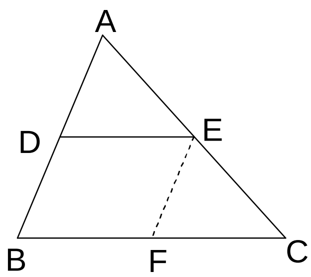


22) Si uno de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo es dos veces del otro, ¿Cuáles son los valores de esos ángulos?

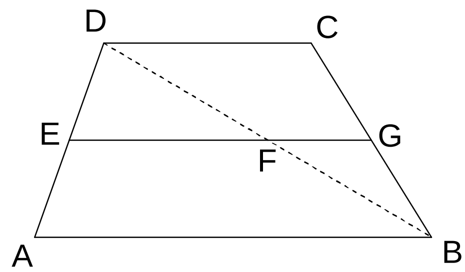
23) Demuéstrese que "Si una recta bisecta un lado de un triángulo y es paralela a otro lado, bisecta también el tercer lado."



24) Demuéstrese que “La recta que une los puntos medios de dos lados de un triángulo es paralela al tercer lado e igual a la mitad de ese lado.”



25) Demuéstrese que “La recta que une los puntos medios de los lados no paralelos de un trapecio es igual a la semisuma de las bases (esto es, a un medio de la suma de las bases).”



26) ¿Cuántos lados tiene un polígono regular en que cada ángulo es de 156°?

Rta.: 15

27) Los ángulos de un cuadrilátero son x, $2x$, $2x$ y $3x$. ¿Cuáles son sus valores?

Rta.: $x = 45°$

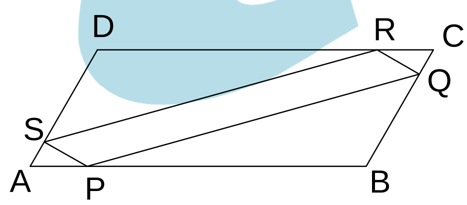
28) Las bisectrices de los ángulos iguales de un triángulo isósceles se encuentran en P. El otro ángulo del triángulo es de 30°. Hállese el valor del ángulo P.

Rta.: 105

29) Un ángulo externo de un paralelogramo es la octava parte de la suma de los cuatro ángulos externos. ¿Cuáles son los ángulos del paralelogramo?

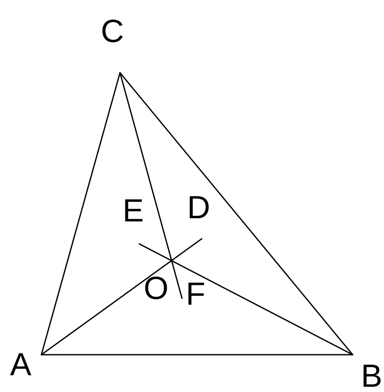
Rta.: 45

30) En el paralelogramo AC, $AP = CR$, $BQ = DS$. Demuéstrese que $PQRS$ también es un paralelogramo.

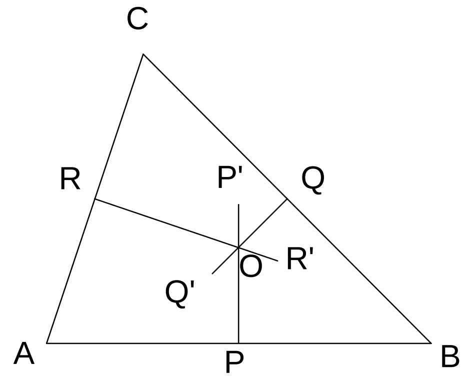


31) Demuéstrese que las rectas que unen consecutivamente los puntos medios de los lados de un paralelogramo forman otro paralelogramo.

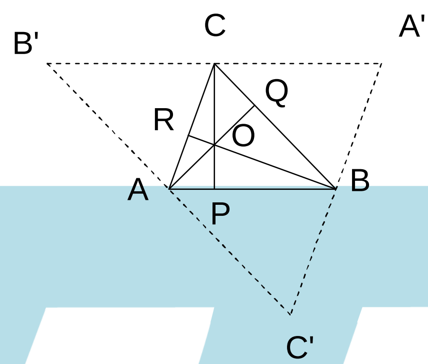
32) Las bisectrices de los tres ángulos de un triángulo concurren en un punto equidistante de los lados.



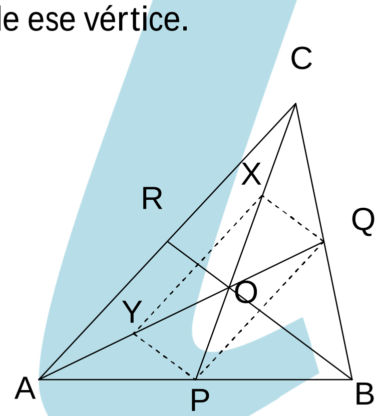
33) Las perpendiculares mediatrices de los tres lados de un triángulo concurren en un punto equidistante de los vértices.



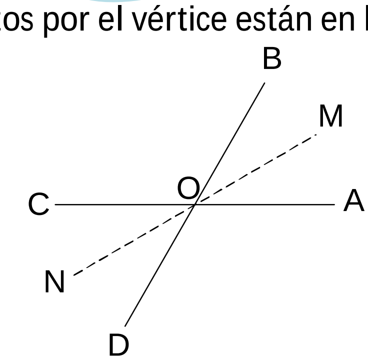
34) Las perpendiculares trazadas de los vértices de un triángulo a los lados opuestos son concurrentes.



35) Las medianas de un triángulo se encuentran en un punto cuya distancia a cada vértice es igual a dos tercios de la mediana trazada de ese vértice.



36) Las bisectrices de dos ángulos opuestos por el vértice están en línea recta.

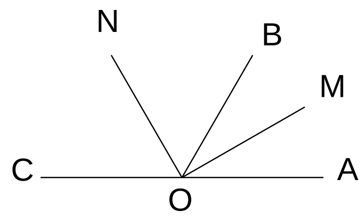


37) La bisectriz prolongada de uno de dos ángulos opuestos por el vértice bisecta también el otro.

38) Las bisectrices de dos ángulos adyacentes son perpendiculares entre sí.

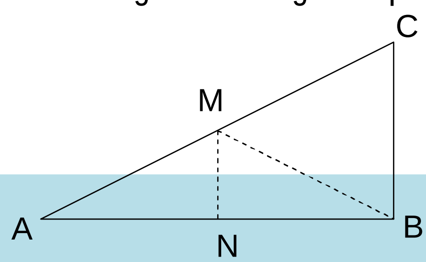
39) Las bisectrices de los dos pares de ángulos opuestos por el vértice formados por dos rectas que se cortan son perpendiculares entre sí.

40) Si las bisectrices de dos ángulos consecutivos son perpendiculares entre sí, los dos ángulos son suplementarios.

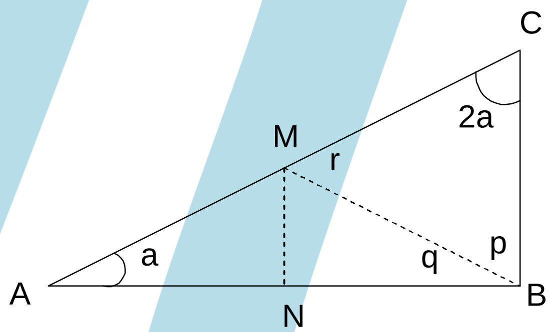


41) Si dos triángulos isósceles tienen una misma base, la recta que une los vértices opuestos a la base es la perpendicular mediatriz de la base.

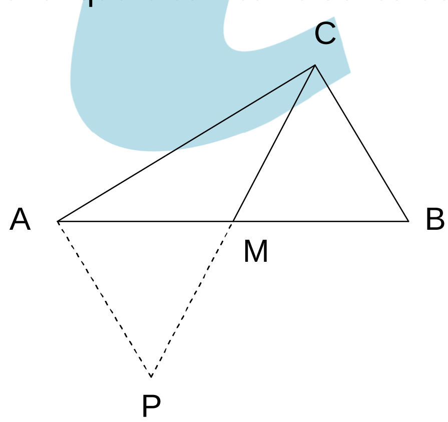
42) El punto medio de la hipotenusa de un triángulo rectángulo equidista de los tres vértices.



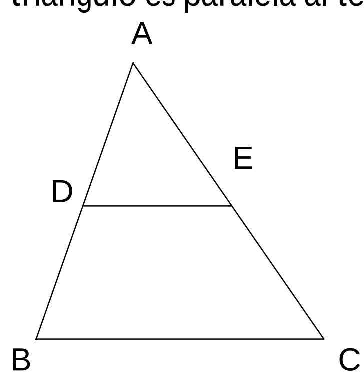
43) Si uno de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo es el doble del otro, la hipotenusa es igual al doble de del cateto más corto.



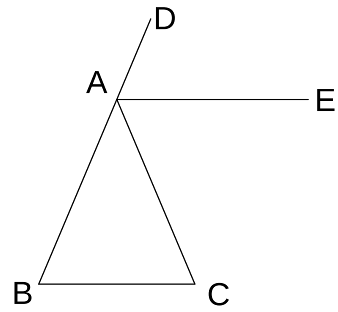
44) Una mediana de un triángulo es menor que la semisuma de los lados que la comprenden.



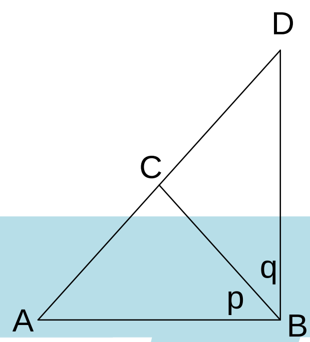
45) La recta que bisecta dos lados de un triángulo es paralela al tercer lado.



46) En todo triángulo isósceles, la bisectriz del ángulo externo opuesto a los ángulos iguales es paralela al lado desigual.



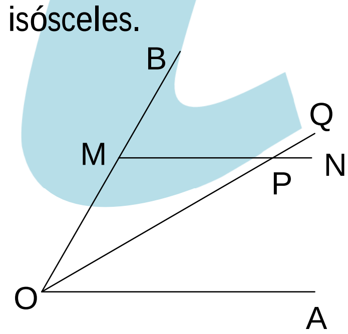
47) Si uno de los lados iguales de un triángulo isósceles se prolonga más allá del vértice, haciendo la prolongación igual al lado mismo, y del extremo de ella se traza una recta al vértice opuesto, ésta es perpendicular a la base.



48) Si los lados iguales de un triángulo isósceles se prolongan más allá del vértice en longitudes iguales, las distancias de los extremos de dichas prolongaciones a los vértices opuestos son iguales.

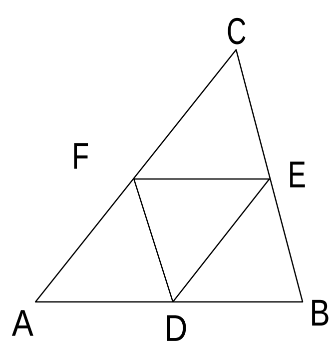
49) Si la recta que une un vértice de un triángulo al punto medio del lado opuesto es la mitad de ese lado, el ángulo opuesto a ese lado es recto.

50) Si por un punto cualquiera de la bisectriz de un ángulo se traza una paralela a uno de los lados del ángulo, el triángulo así formado es isósceles.

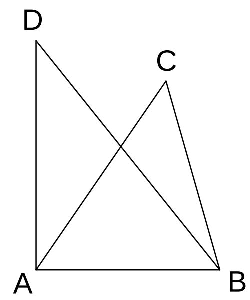


51) Por un punto cualquiera C de una recta AB se traza una recta indefinida. De dos puntos de esta recta equidistantes de C se trazan perpendiculares a AB. Demuéstrese que estas perpendiculares son iguales.

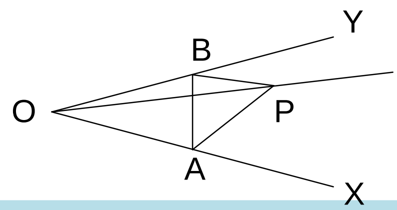
52) Las rectas que unen los puntos medios de los lados de un triángulo dividen el triángulo en cuatro triángulos iguales.



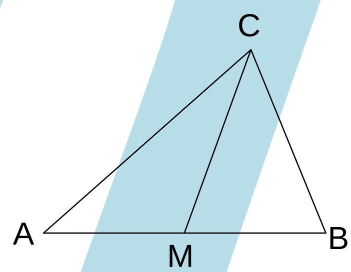
53) Dados los triángulos ABC, ABD, con el lado AB común y el vértice C fuera del triángulo ABD, demostrar que si AC es igual a AD, BC no puede ser igual a BD.



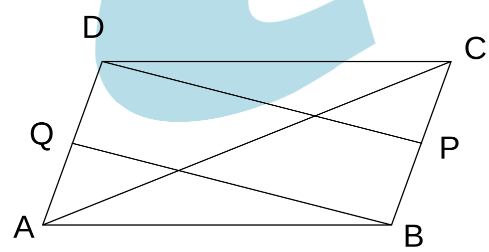
54) En los lados del ángulo XOY se toman los segmentos iguales AO, OB. Sobre AB se construye un triángulo APB en que AP es mayor que BP. Demuéstrese que P está fuera de la bisectriz del ángulo XOY.



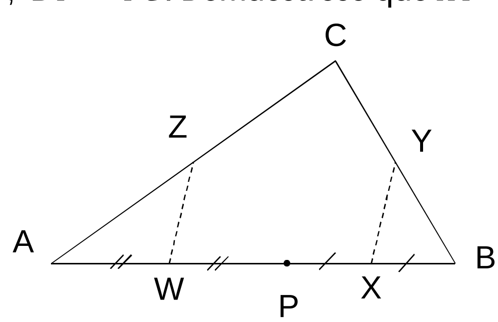
55) Por el punto medio M de la recta AB se traza a AB una oblicua MC. Demuéstrese que CA no puede ser igual a CB.



56) En un paralelogramo $ABCD$, Q es el punto medio de AD, y P el de BC. Demuéstrese que BQ y DP trisectan AC.

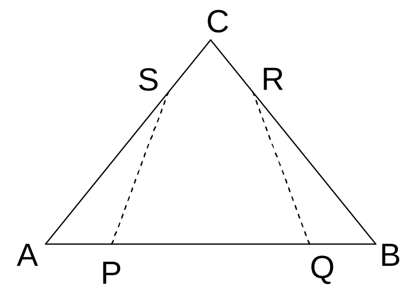


57) Sobre el lado AB de un triángulo ABC se toma un punto cualquiera P. Luégo se hacen $AW = WP$, $PX = XB$, $AZ = ZC$, $BY = YC$. Demuéstrese que $XY = WZ$.



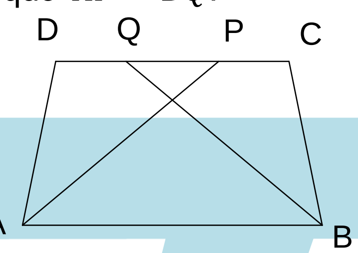
58) En un cuadrado $ABCD$, Q es el punto medio de CD, y P y R se toman en AB de suerte que $AP = BR$. Demuéstrese que $PQ = RQ$.

59) En esta figura, $AC = BC$, y AP, BQ, CR y CS son iguales. Demuéstrese que $QR = PS$.

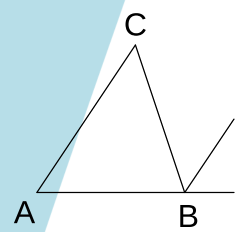


60) Del vértice y de los puntos medios de los lados iguales de un triángulo isósceles se trazan perpendiculares a la base. Demuéstrese que la dividen en cuatro partes iguales.

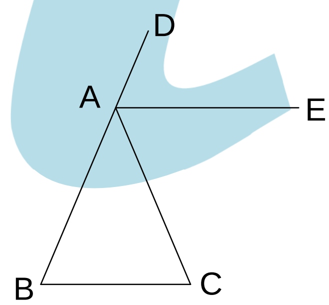
61) Se sabe que en el cuadrilátero $ABCD$ los lados AB y DC son paralelos y que los ángulos C y D son iguales. Si $CP = DQ$, demuéstrese que $AP = BQ$.



62) ¿En qué dirección debe prolongarse un lado de un triángulo para que corte la bisectriz del ángulo externo opuesto?
Examínese los casos:
$A > C$
$A = C$
$A < C$

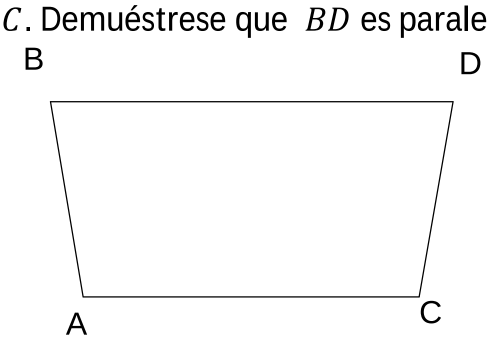


63) Si la bisectriz de un ángulo externo de un triángulo es paralelo al lado opuesto, el triángulo es isósceles.

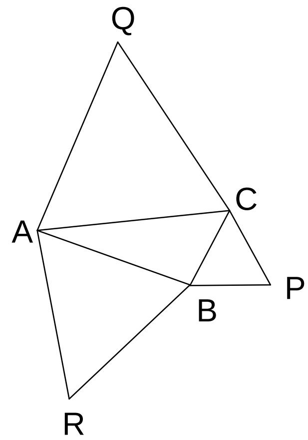


64) En un triángulo isósceles ABC se traza una perpendicular a la base AB. La perpendicular encuentra el lado AC en P, y la prolongación de BC en Q. Demuéstrese que el triángulo PCQ es isósceles.

65) En esta figura, $AB = CD$, y $\angle A = \angle C$. Demuéstrese que BD es paralela a AC.



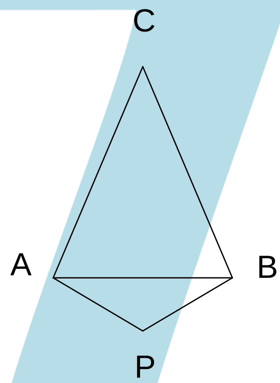
66) Sobre los lados de un triángulo ABC se construyen los triángulos equiláteros BPC, CQA, ARB. Demuéstrese que las rectas AP, BQ, CR son iguales.



67) Si la suma de dos ángulos de un triángulo es igual al tercero, el triángulo es rectángulo.

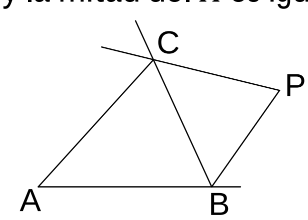
68) Si la recta que une un vértice de un triángulo con el punto medio del lado opuesto divide el triángulo en dos triángulos isósceles, el triángulo es rectángulo.

69) Por los extremos del lado AB de un triángulo ABC se trazan perpendiculares a los otros dos lados. Demuéstrese que el ángulo P formado por ellas es el suplemento del C.



70) Si dos lados de un cuadrilátero son paralelos y los otros dos lados son iguales pero no paralelos, la suma de dos ángulos opuestos es igual a la suma de los otros dos.

71) Las bisectrices de dos ángulos externos de un triángulo cualquiera ABC se encuentran en P. Demuéstrese que la suma del ángulo P y la mitad del A es igual a un recto.

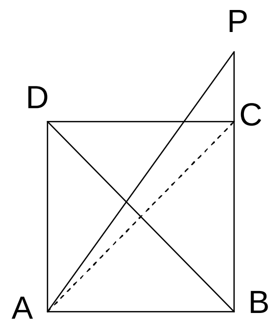


72) Los ángulos opuestos del cuadrilátero formado por las bisectrices de los ángulos de un cuadrilátero cualquiera son suplementarios.

73) La bisectriz del ángulo A del triángulo ABC encuentra el lado BC en D. Demuéstrese que BA es mayor que BD, y CA mayor que CD.

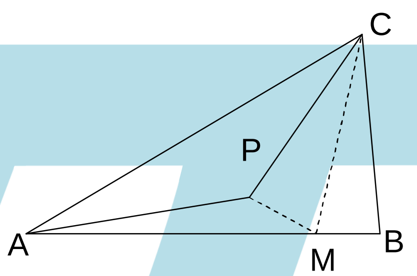
74) Se sabe que en cierto cuadrilátero $ABCD$, AD es el lado mayor y BC el menor. Demuéstrese que el ángulo B es mayor que el ángulo D, y que el ángulo C es mayor que el ángulo A.

75) Si el cuadrilátero $ABCD$ es un cuadrado, y P un punto de la prolongación de BC, demuestrese que AP es mayor que la diagonal DB.



76) Si se aumenta uno de los ángulos de un paralelogramo sin alterar la longitud de los lados, la diagonal que pasa por el vértice de ese ángulo se disminuye.

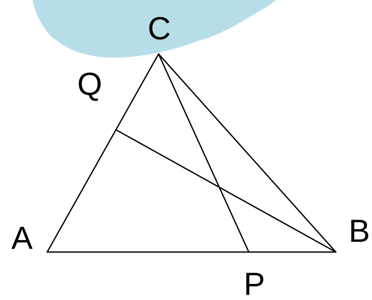
77) En el interior de un triángulo ABC se toma un punto P tal que $CP = CB$. Demuéstrese que AB es mayor que AP.



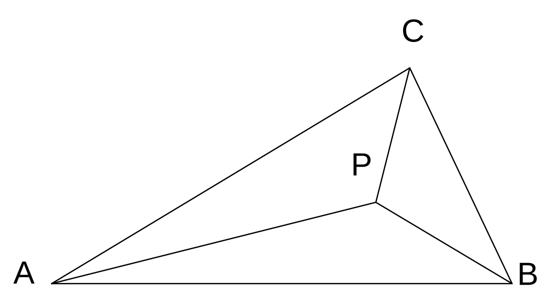
78) Se sabe que en cierto cuadrilátero $ABCD$ los lados AD y BC son iguales, y que el ángulo C es menor que el D. Demuéstrese que la diagonal AC es mayor que la BD.

79) Se sabe que en cierto cuadrilátero $ABCD$ los lados AD y BC son iguales, y que el ángulo D es mayor que el C. Demuéstrese que el ángulo B es mayor que el ángulo A.

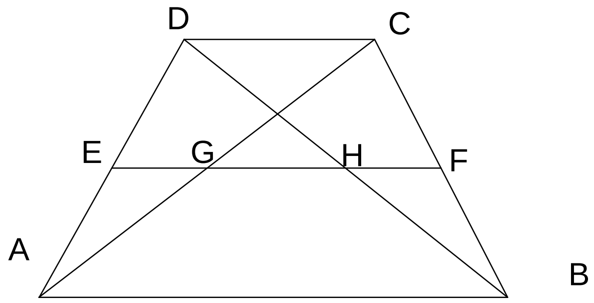
80) En el triángulo ABC, el lado AB es mayor que el AC. Si $BP = CQ$, demuéstrese que BQ es mayor que CP.



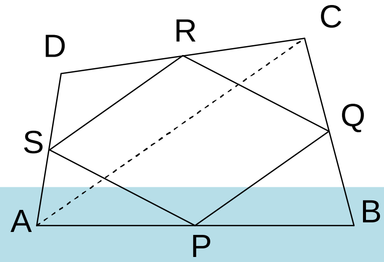
81) La suma de las distancias de un punto cualquiera a los tres vértices de un triángulo es mayor que la semisuma de los lados.



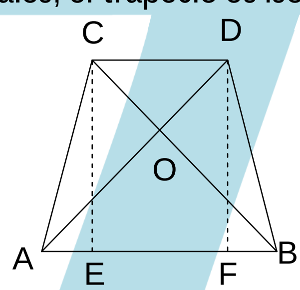
82) La recta que une los puntos medios de los lados no paralelos de un trapecio pasa por los puntos medios de las diagonales.



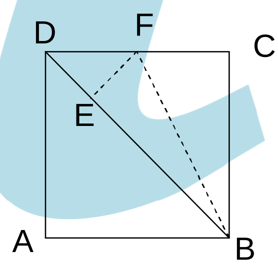
83) Las rectas que unen consecutivamente los puntos medios de los lados de un cuadrilátero cualquiera forman un paralelogramo.



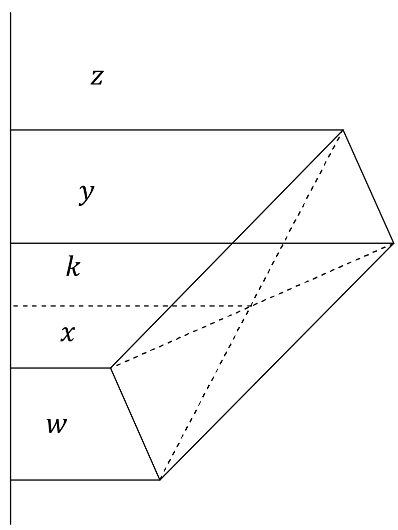
84) Si las diagonales de un trapecio son iguales, el trapecio es isósceles.



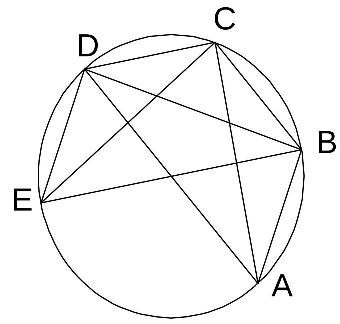
85) Si en la diagonal BD de un cuadrado $ABCD$ se toma BE igual a BC, y se traza EF perpendicular a BD, se tendrá: $DE = EF = FC$.



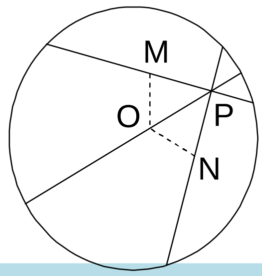
86) Si de los vértices de un paralelogramo se trazan perpendiculares a una recta cualquiera situada fuera del paralelogramo, la suma de las dos perpendiculares trazadas de dos vértices opuestos es igual a la suma de las otras dos.



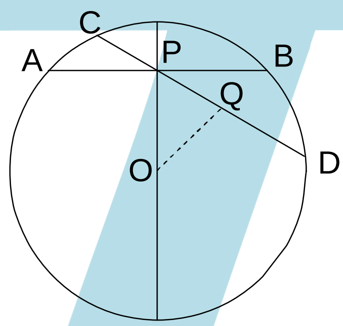
87) Demuéstrese que si las cuerdas AB, BC, CD, DE son iguales, también lo son las cuerdas AC, BD, CE, así como las AD y BE.



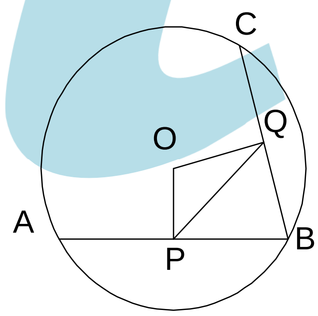
88) Si dos cuerdas que se cortan forman ángulos iguales con el diámetro que pasa por su punto de intersección, las dos cuerdas son iguales.



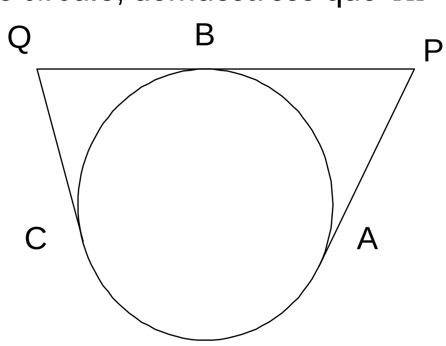
89) La cuerda menor que puede trazarse por un punto interior a un círculo es la perpendicular al diámetro que pasa por ese punto.



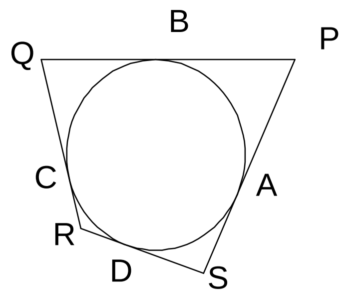
90) El arco AB es mayor que el BC; OP, OQ son perpendiculares trazadas del centro a AB y BC. Demuéstrese que $\angle QPO > \angle OQP$.



91) Sí CQ, QP, PA son tangentes a este círculo, demuéstrese que $AP + QC = PQ$.

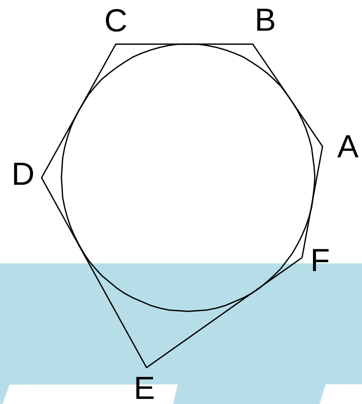


92) Si los cuatro lados de un cuadrilátero son tangente a un círculo, la suma de dos lados opuestos es igual a la de los otros dos; esto es, $SP + QR = PQ + RS$.



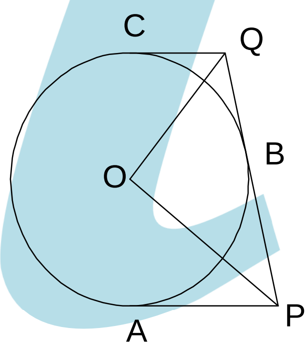
93) Los lados de este hexágono son tangentes a un círculo.

Demuéstrese que $AB + CD + EF = BC + DE + FA$.



94) Si los lados de un cuadrilátero son tangentes a un círculo, la suma de los ángulos centrales subtendidos por dos lados opuestos del cuadrilátero es igual a dos ángulos rectos.

95) Las tangentes CQ, AP son paralelas, y la QP las corta en P y Q. Demuéstrese que las rectas QO y OP trazadas de Q y P al centro O del círculo se cortan en ángulo recto.



96) La recta que pasa por los puntos medios de dos cuerdas paralelas pasa por el centro del círculo.

97) Si dos círculos son tangentes exteriormente, las tangentes trazadas a ellos de cualquier punto de su tangente interna común son iguales.

98) Si dos círculos tangentes exteriormente son tangente a una recta en A y B, su tangente común interna bisecta AB.

99) La recta que va del centro de un círculo al punto de intersección de dos tangentes es la perpendicular bisectriz de la cuerda que une los puntos de contactos.

100) Cada uno de tres círculos de 4,8 ; 3,6 y 4,2 m de diámetro, es tangente exteriormente a los otros dos. Hallar el perímetro del triángulo formado por las líneas de los centros.

101) Si dos círculos tangentes exteriormente en P son tangentes a una recta en A y B, el ángulo BPA es recto.

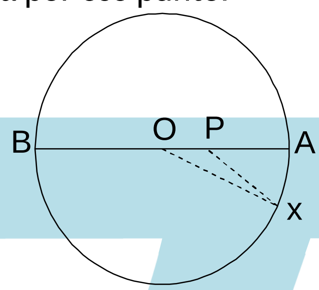
102) Tres círculos son tangentes exteriormente en A, B, C. Las cuerdas AB y AC prolongadas encuentran en D y E la circunferencia BC. Demuéstrese que DE es un diámetro de esta circunferencia.

103) Si dos radios perpendiculares entre sí se prolongan hasta que encuentren en A, B una tangente al círculo, las otras dos tangentes trazadas por A y B son paralelas.

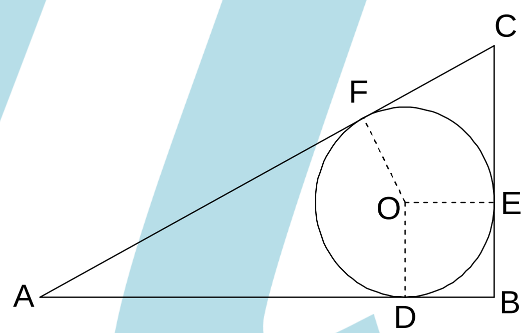
104) Las dos tangentes externas comunes a dos círculos son iguales, y las dos internas también lo son.

105) Todo trapecio inscrito en un círculo es isósceles.

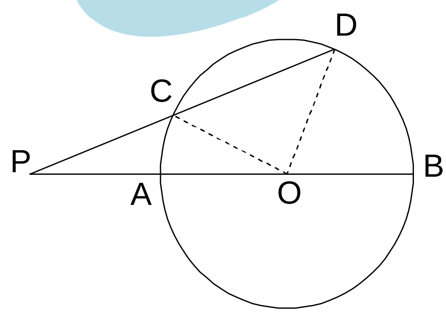
106) La recta menor que puede trazarse de un punto interior de un círculo a la circunferencia es el segmento menor del diámetro que pasa por ese punto.



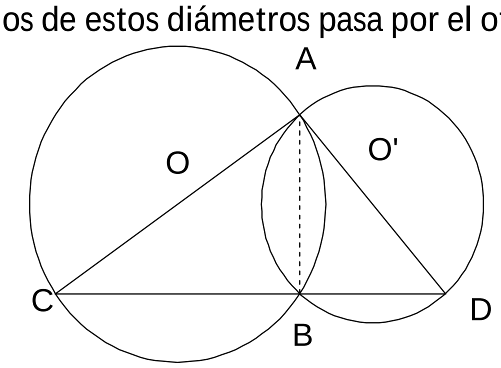
107) El diámetro del círculo inscrito en un triángulo rectángulo es igual a la suma de los catetos menos la hipotenusa.



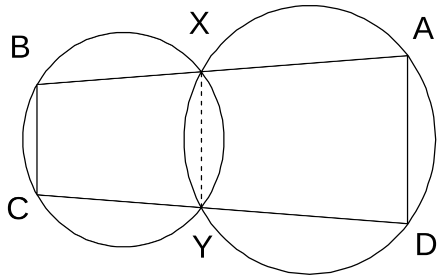
108) La menor recta que de un punto exterior puede trazarse a una circunferencia es la parte externa de la secante que pasa por el centro.



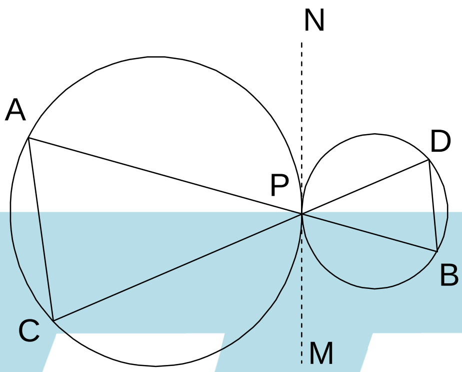
109) Por uno de los puntos de intersección de dos circunferencias se traza un diámetro de cada una. La recta que une los extremos de estos diámetros pasa por el otro punto de intersección.



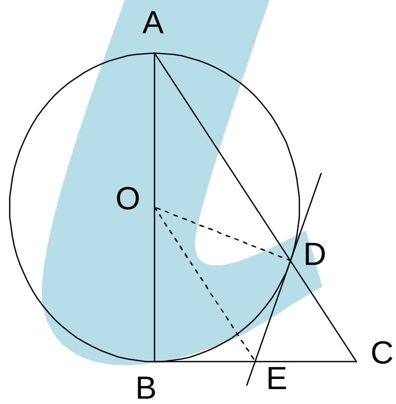
110) Si por los puntos de intersección de dos circunferencias se trazan dos rectas cualesquiera limitadas por las circunferencias, las cuerdas trazadas entre los extremos correspondientes de las dos rectas son paralelas.



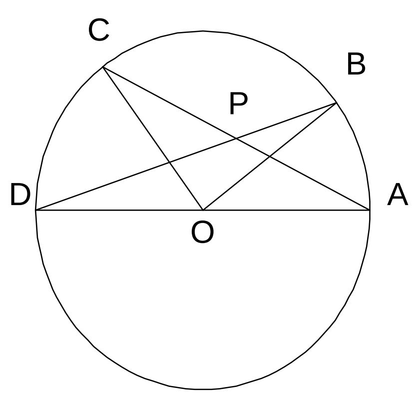
111) Si por el punto de contacto de dos círculos tangentes se trazan dos rectas limitadas por las circunferencias, las cuerdas determinadas por los extremos de esas rectas son paralelas.



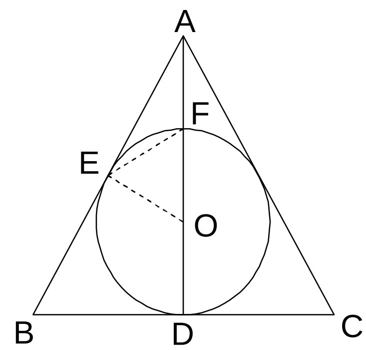
112) Si uno de los catetos de un triángulo rectángulo es el diámetro de un círculo, la tangente trazada por el punto en que el círculo corta la hipotenusa pasa por el punto medio del otro cateto.



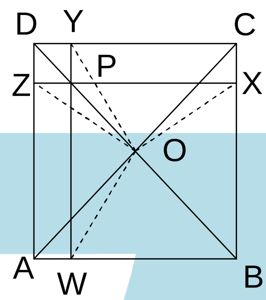
113) Si por los extremos del diámetro AD se trazan dos cuerdas AC, DB que se corten en P de suerte que $\angle APB = 45°$, el $\angle BOC$ es recto.



114) El radio del círculo inscrito en un triángulo equilátero es un tercio de la altura del triángulo.



115) Si por cualquier punto de una diagonal de un cuadrado se trazan rectas paralelas a los lados, los puntos en que cortan los otros lados están en una circunferencia cuyo centro es el punto medio de las diagonales.



116) En un triángulo ABC, $AB = 6{,}5$, $CA = 6$, $BC = 7$. Calcúlense los segmentos de AB determinados por la bisectriz del ángulo C.

117) En un triángulo ABC, $CA = 7{,}5$, $BC = 7$, $AB = 8$. Calcúlense los segmentos de CA determinados por la bisectriz del ángulo B.

118) En un triángulo ABC, se toman P y Q en CA y BC respectivamente de suerte que $AP{:}\,PC = BQ{:}\,QC$. Luego se traza por A una paralela a PB, la cual corta la prolongación de CB en R. Demuéstrese que $CQ{:}\,CB = CB{:}\,CR$.

119) Las alturas homólogas de dos triángulos semejantes son entre sí como los lados homólogos.

120) Si tres transversales concurrentes cortan dos paralelas, los segmentos interceptados en las paralelas son proporcionales.

121) Si dos círculos son tangentes exteriormente, las cuerdas determinadas por dos rectas por el punto de contacto son proporcionales.

122) Si dos círculos son tangentes exteriormente, su tangente externa común es media proporcional entre los diámetros.

123) Por un punto A de una circunferencia se trazan dos cuerdas AB, AC, y el diámetro AD. La tangente en D corta las prolongaciones de AB y AC en E y F. Los triángulos ABC , AEF son semejantes.

124) Si AD, BE son dos alturas del triángulo ABC, los dos triángulos DEC y ABC son semejantes.

125) Dos círculos son tangentes en P. Por P se trazan rectas que encuentran una de las circunferencias en A, B, C y la otra en A', B', C'. Los triángulos ABC, $A'B'C'$ son semejantes.

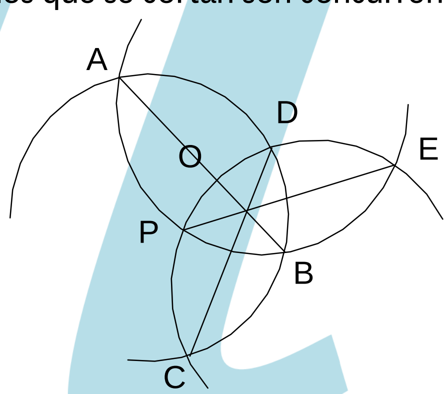
126) Si dos círculos son tangentes interiormente, el menor divide proporcionalmente las cuerdas del mayor trazadas por el punto de contacto.

127) Las tangentes trazadas a dos círculos que se cortan de cualquier punto tomado en la prolongación de su cuerda común son iguales.

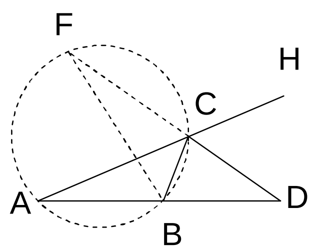
128) La cuerda común prolongada de dos círculos que se cortan bisecta sus tangentes comunes.

129) Si una recta trazada por uno de los vértices de un triángulo divide el lado opuesto en partes proporcionales a los otros dos, la recta es la bisectriz del ángulo de ese vértice.

130) Las cuerdas comunes a tres círculos que se cortan son concurrentes.



131) El cuadrado de la bisectriz de un ángulo externo de un triángulo es igual al producto de los segmentos que la bisectriz determina en el opuesto, menos el producto de los otros dos lados.



132) Si la línea de los centros de dos circunferencias las corta consecutivamente en A, B, C, D, y encuentra en P una de sus tangentes externas comunes, $PA \times PD = PB \times PC$.

133) Por el punto P del ejercicio anterior se traza una secante que corta las circunferencias en E, F, G, H. Demuéstrese que $PE \times PH = PF \times PG$.

134) Por un punto distante 1 cm del centro de un círculo de 3 cm de radio se trazan cuerdas. ¿Cuál es el producto de los dos segmentos de cada cuerda?

135) Una cuerda AB de 3 cm se prolonga por B hasta P, de suerte que $BP = 6$ cm. Determínese la longitud de la tangente trazada por P.

136) Si tres círculos son tangentes exteriormente, las tangentes trazadas por los puntos de contacto pasan por el centro del círculo inscrito en el triángulo formado por las líneas de los centros.

137) Demuéstrese que el área de un triángulo equilátero de lado l es $\frac{1}{4}l^2\sqrt{3}$.

138) Calcúlense en un círculo de 40 cm de diámetro la mayor y la menor cuerda que pueden trazarse por un punto situado a 12 cm del centro.

139) Si las diagonales de un cuadrilátero se cortan en ángulo recto, la suma de los cuadrados de dos lados opuestos es igual a la de los cuadrados de los otros dos.

140) La suma de los cuadrados de los segmentos de dos cuerdas perpendiculares es igual al cuadrado del diámetro del círculo.

141) La diferencia de los cuadrados de dos lados de un triángulo es igual a la diferencia de los cuadrados de los segmentos determinados en el tercer lado por la perpendicular bajada a él del vértice opuesto.

142) El cuadrado de uno de los lados iguales de un triángulo isósceles es igual al cuadrado de cualquier recta trazada del vértice a la base, más el producto de los segmentos en que esa recta divide la base.

143) Si sobre los lados de un triángulo rectángulo se construyen triángulos equiláteros, el construido sobre la hipotenusa es equivalente a la suma de los otros dos.

144) Si de un punto interior a un paralelogramo se trazan rectas a los vértices, la suma de los dos triángulos cuyas bases son dos de los lados paralelos es equivalente a la suma de los otros dos.

145) Toda recta trazada por el punto de intersección de las diagonales de un paralelogramo bisecta el área del paralelogramo.

146) El triángulo determinado por rectas que van del punto medio de uno de los lados no paralelos de un trapecio a los vértices opuestos es equivalente a la mitad del trapecio.

147) ¿Cuántos grados tiene el ángulo central de un octógono regular? ¿Cuántos el ángulo interno? ¿Cuál es la suma de los dos?

148) Demuéstrese que la apotema de un triángulo equilátero es igual a la mitad del radio.

149) Demuéstrese que la apotema de un triángulo equilátero es igual a un cuarto del diámetro del círculo circunscrito, y dedúzcase de aquí un procedimiento para inscribir un triángulo equilátero en un círculo dado.

150) Si se representa por a el lado de un octógono regular inscrito, ¿Cómo se expresa en función de a el lado del cuadrado inscrito en el mismo círculo?

151) Las áreas de dos segmentos de círculo semejante están entre sí en la misma relación que los cuadrados de los radios o de los diámetros respectivos.

152) Un punto se mueve de tal modo que la diferencia de los cuadrados de sus distancias a dos puntos fijos es constante. Demuéstrese que el punto se mueve en una recta perpendicular a la que une los dos puntos fijos.

153) En un círculo cuyo radio es de 10 cm se trazan dos cuerdas paralelas iguales al radio. Hállese el área de la parte del círculo comprendida entre las dos paralelas.

154) Si dos radios perpendiculares se prolongan hasta su encuentro con una tangente, las otras tangentes trazadas por los puntos de intersección son paralelas.

155) La recta que une los pies de las perpendiculares trazadas a los lados iguales de un triángulo isósceles por los extremos del otro lado es paralela a éste.

156) La suma de las perpendiculares trazadas a los n lados de un polígono regular por un punto interior es igual a n veces la apotema.

157) Si dos ángulos consecutivos de un cuadrilátero son rectos, las bisectrices de los otros dos son perpendiculares entre sí.

158) Dados los puntos medios de los lados de un triángulo, construir el triángulo.

159) Si por un punto cualquiera de la cuerda común de dos circunferencias que se cortan se trazan otras dos cuerdas, una en cada círculo, sus cuatro extremidades quedaran en otra circunferencia.

160) Si dos cuerdas se cortan en ángulo recto dentro de un círculo, la suma de los cuadrados de sus segmentos es igual al cuadrado del diámetro. Discútase el caso en que las cuerdas se cortan fuera del círculo o en la circunferencia.

161) La bisectriz de un ángulo cualquiera de un cuadrilátero inscrito y la del ángulo externo opuesto se cortan en la circunferencia.

162) Si de un punto cualquiera interior a un triángulo equilátero se bajan perpendiculares a los lados, su suma es constante.

163) Las alturas de un triángulo cualquiera se cortan de tal modo que el producto de los dos segmentos de cada una es igual al de los dos segmentos de cualquiera de las otras dos.

164) El área de un triángulo es igual al producto del semi-perímetro por el radio del círculo inscrito.

165) El área de un cuadrado, dos de cuyos vértices están en la circunferencia y los otros dos en el diámetro de un círculo es $\frac{2}{5}$ del área del cuadrado inscrito.

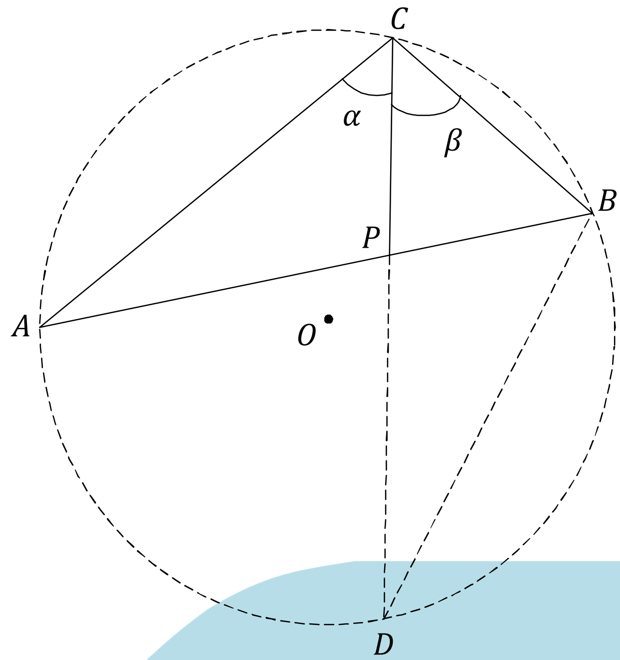
166) Trazar una recta cuyo largo sea $\sqrt{7{,}5}$ cm.

167) Si de un punto situado en el interior de un triángulo se trazan rectas a los extremos de los lados, la suma de estas rectas es menor que la suma de los dos lados del triángulo.

168) Dos circunferencias se cortan en dos puntos A y B. Por el punto A se traza una secante variable, que corta las dos circunferencias en los puntos C y D respectivamente. Demuéstrese que el ángulo DBC es constante.

ANEXO

1) **El cuadrado de la bisectriz de un ángulo cualquiera de un triángulo es igual al producto de los lados del ángulo menos el producto de los segmentos determinados por la bisectriz en el lado opuesto.**



H) $\overset{\Delta}{ABC}$ triángulo cualquiera.

$\overline{CP}$ bisectriz de $\overset{\Delta}{C}$

O.....centro cia circunscripta al triángulo

T) $\overline{CP}^2 = \overline{AC} \cdot \overline{BC} - \overline{AP} \cdot \overline{PB}$

D) Consideremos los triángulos.

$$\overset{\Delta}{APC} - S - \overset{\Delta}{DBC} \ldots\ldots\ldots \begin{cases} \alpha = \beta \ldots\ldots \text{Por ser } \overline{CP} \text{ bisectriz } \overset{\angle}{C} \\ \overset{\angle}{A} = \overset{\angle}{D} \ldots\ldots\ldots \text{Por ser ambos } = \dfrac{1}{2}\,\overset{\frown}{BC} \end{cases}$$

Luego: $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{CD}} = \dfrac{\overline{CP}}{\overline{BC}}$

$$\overline{AC} \cdot \overline{BC} = \overline{CD} \cdot \overline{CP}$$

$$\overline{AC} \cdot \overline{BC} = (\overline{CP} + \overline{PD})\overline{CP}$$

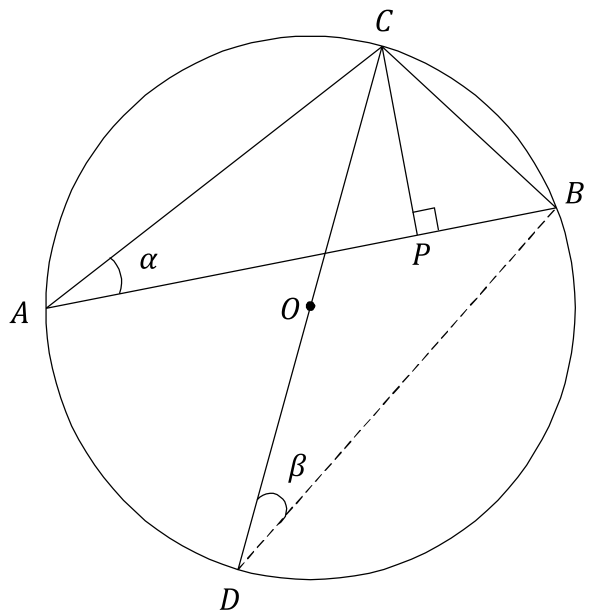
$$\overline{AC} \cdot \overline{BC} = \overline{CP}^2 + \overline{PD} \cdot \overline{CP} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Pero ....$\overline{CP} \cdot \overline{PD} = \overline{AP} \cdot \overline{PB}$ ... ...El producto de los segmentos de dos cuerdas que se cortan en una cia, son iguales.

Luego: $\overline{AC} \cdot \overline{BC} = \overline{CP}^2 + \overline{AP} \cdot \overline{PB}$

También $\overline{CP}^2 = \overline{AC} \cdot \overline{BC} - \overline{AP} \cdot \overline{PB}$

2) **En todo triángulo, el producto de dos lados cualesquiera es igual al producto del diámetro del círculo circunscripto por la altura del triángulo, tomando el tercer lado por base.**



H) $\overset{\Delta}{ABC}$...........Triángulo cualquiera

Cia O es la cia circunscripta al triángulo

$\overline{CD}$ Diámetro de Cia O

$\overline{AB}$...........Base del triángulo

$\overline{CP}$......Altura respecto $\overline{AB}$

T) $\overline{AC} \cdot \overline{BC} = \overline{CD} \cdot \overline{CP}$

D) uniendo el punto B con D, y considerando los triángulos

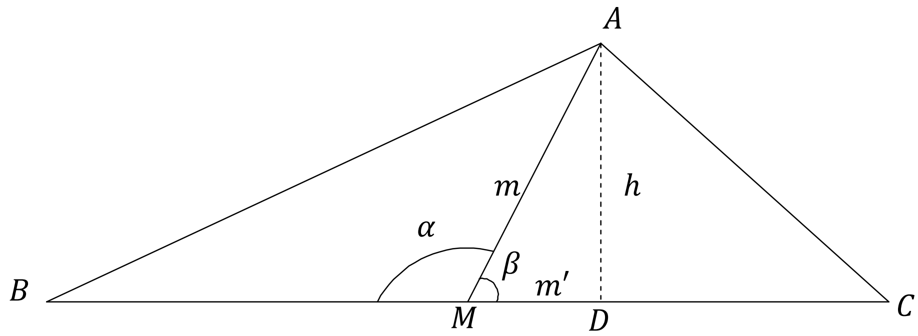
$$\overset{\Delta}{APC} - S - \overset{\Delta}{DBC} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \begin{cases} \overset{\angle}{\alpha} = \overset{\angle}{\beta} \ldots\ldots\ldots\ldots \text{Por ser ambos } = \dfrac{1}{2}\overset{\frown}{BC} \\ \overset{\Delta}{APC} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{Triángulo rectangulo } \overline{CP} \perp \overline{AB} \\ \overset{\Delta}{DBC} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{Triángulo rectangulo por ser } \overset{\angle}{B} \\ \qquad \text{inscripto en una semicia.} \end{cases}$$

Luego .... $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{CD}} = \dfrac{\overline{CP}}{\overline{BC}}$

O mejor

$$\overline{AC} \cdot \overline{BC} = \overline{CD} \cdot \overline{CP}$$

3) **La suma de los cuadrados de dos lados cualesquiera de un triángulo es igual a dos veces el cuadrado de la mitad del tercero, más dos veces el cuadrado de la mediana del tercero.**
La diferencia de dos cuadrados de dos lados cualesquiera de un triángulo es igual a dos veces el producto del tercero por la proyección de su mediana sobre él.



H) $\overset{\Delta}{ABC}$....................Triángulo cualquiera.

m..........................mediana relativa $\overline{BC}$

m'.........................proyección de la mediana sobre $\overline{BC}$

Supóngase también $\overset{\angle}{C} > \overset{\angle}{B}$

T) $\begin{cases} c^2 + b^2 = 2\overline{BM}^2 + 2m^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{1ª Parte} \\ c^2 - b^2 = 2am' \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.\ldots\ldots\ldots.\text{2ª Parte} \end{cases}$

D) Aplicaremos el teorema: "En todo triángulo el cuadrado de un lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos más o menos, el doble producto de uno de ellos por la proyección del otro sobre el"

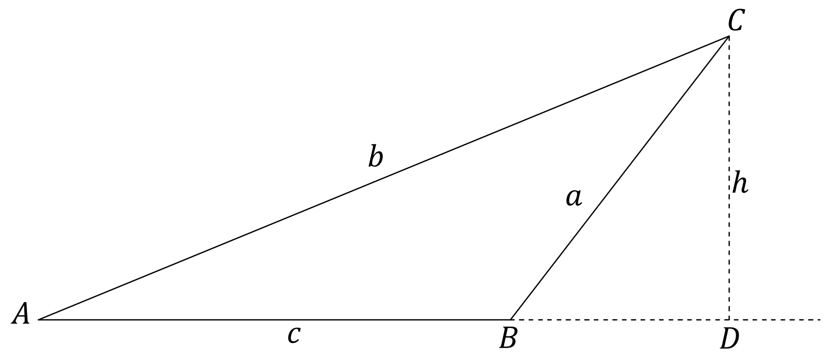
En $\overset{\Delta}{AMB} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..c^2 = \overline{BM}^2 + m^2 + 2\overline{BM}\, m' \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..\alpha$ = obtuso

En $\overset{\Delta}{AMC} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..b^2 = \overline{MC}^2 + m^2 - 2\overline{MC}\, m' \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..\beta$ = agudo

Sumando m. a m., tendremos............... $c^2 + b^2 = 2\,\overline{BM}^2 + 2\,m^2 \ldots\ldots\ldots\ldots.$1ª Parte

Restando m. a m., tendremos............... $c^2 - b^2 = 2\,a\,m' \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ 2ª Parte

4) **Calcular el área de un triángulo en función de los lados (Formula de Heron)**



Sea $\overset{\Delta}{ABC}$ un triángulo cualquiera y siendo $\overset{\angle}{A}$ agudo

Sea $\begin{cases} P = a + b + c \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{Perimetro del triángulo} \\ p = \dfrac{a+b+c}{2} = \dfrac{P}{2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{Semi perimetro} \end{cases}$

En el triángulo $\overset{\Delta}{ADC}$ ....$h^2 = b^2 - \overline{AD}^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ (1)

En el triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$ ....$a^2 = b^2 + c^2 - 2.c.\overline{AD} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ (2)

De (2) ....$\overline{AD} = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2c} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ en (1)

$$h^2 = b^2 - \frac{(b^2+c^2-a^2)^2}{4c^2} = \frac{4b^2c^2-(b^2+c^2-a^2)^2}{4c^2}$$

$$h^2 = \frac{(2bc+b^2+c^2-a^2)(2bc-b^2-c^2+a^2)}{4c^2}$$

$$h^2 = \frac{[(b+c)^2-a^2][a^2-(b-c)^2]}{4c^2}$$

$$h^2 = \frac{(a+b+c)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)}{4c^2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(3)}$$

Pero: $\begin{cases} a+b+c = 2p \\ b+c-a = (a+b+c)-2a = 2p-2a = 2(p-a) \\ a+b-c = 2(p-c) \\ a-b+c = 2(p-b) \end{cases}$

Llevando estas expresiones en (3) tendremos:

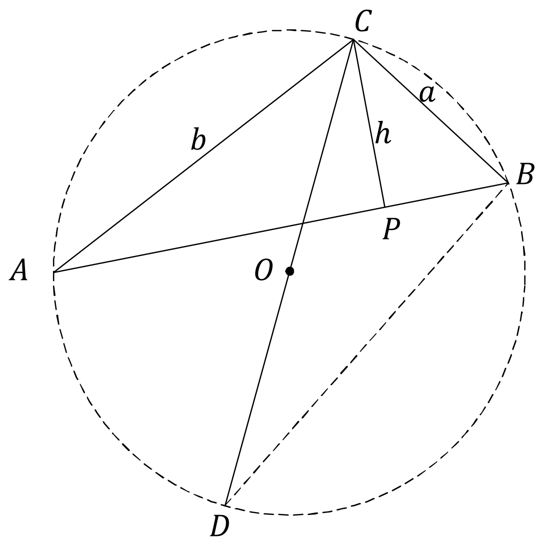
$$h^2 = \frac{2p.2(p-a)2(p-b)2(p-c)}{4c^2}$$

$$h = \frac{2}{c}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$A_{\overset{\Delta}{ABC}} = \frac{1}{2}c.h = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$\boxed{A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{FORMULA DE HERON}$$

5) **Calcular el radio R del círculo circunscripto a un triángulo en función de los lados.**



"En todo triángulo, el producto de dos lados cualesquiera es igual al producto del diámetro del circulo circunscripto por la altura del triángulo, tomando el tercer lado por base"

Es decir:...$a.b = \overline{CD}.\overline{CP}$

$$a.b = 2R.h$$

$$R = \frac{a\,.\,b}{2h}$$

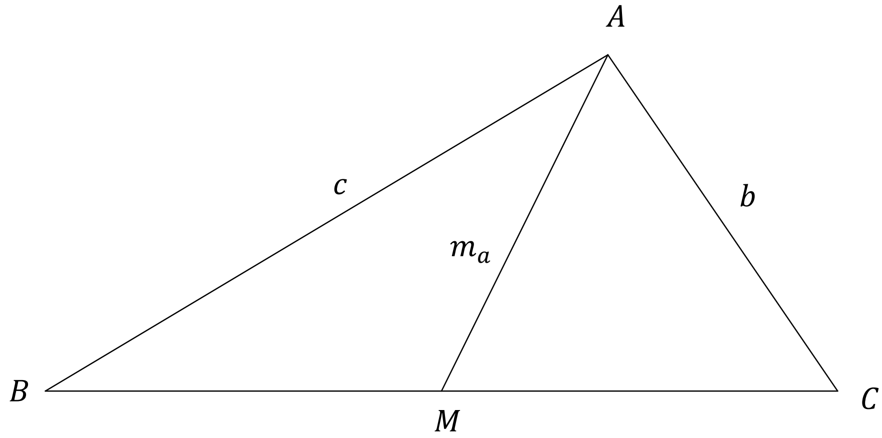
Pero....................$h = \frac{2}{c}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.....................de la fórmula de Heron

$$R = \frac{ab}{2.\frac{2}{c}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}} = \frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

$$\boxed{R = \frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}}$$

Siendo $\qquad p = \frac{a+b+c}{2}$

6) **Calculo de la mediana de un triángulo, en función de los lados.**



"La suma de los cuadrados de dos lados cualesquiera de un triángulo es igual a dos veces el cuadrado de la mitad del tercero, más dos veces el cuadrado de la mediana del tercero"

Es decir: $$b^2 + c^2 = 2\,\overline{BM}^2 + 2\,m_a^2$$

Luego $$2\,m_a^2 = b^2 + c^2 - 2\left(\frac{a}{2}\right)^2$$

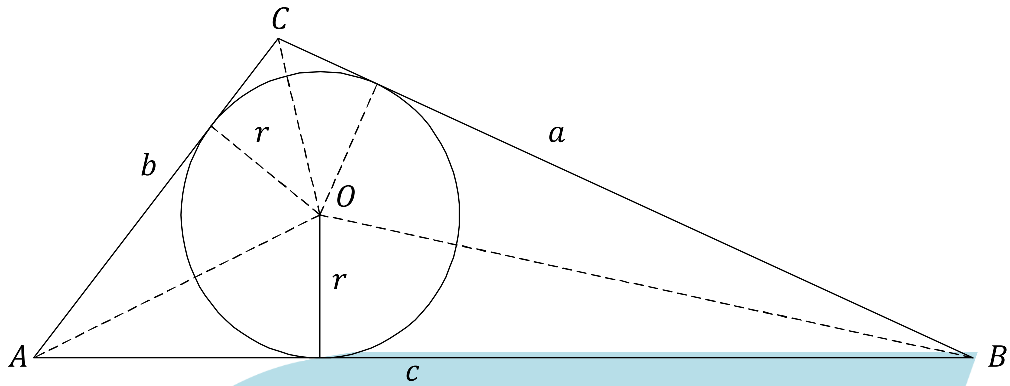
$$m_a^2 = \frac{2\,(b^2 + c^2) - a^2}{4}$$

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2\,(b^2 + c^2) - a^2}$$

7) **Calcular el radio r de la circunferencia inscripta en un triángulo en función de los lados.**

r...............radio de la cia inscripta en el triángulo

$$p = \frac{a+b+c}{2}$$



$$A_{\underset{ABC}{\Delta}} = A_{\underset{AOB}{\Delta}} + A_{\underset{BOC}{\Delta}} + A_{\underset{COA}{\Delta}}$$

$$A_{\underset{ABC}{\Delta}} = \frac{1}{2}\, c.r + \frac{1}{2}\, a.r + \frac{1}{2}\, b.r$$

$$A_{\underset{ABC}{\Delta}} = \frac{1}{2}\, r\,(a+b+c) = r\,\frac{(a+b+c)}{2}$$

$$A_{\underset{ABC}{\Delta}} = r\,.\,p \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

Pero $A_{\underset{ABC}{\Delta}} = \sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}$ ....(2)................Fórmula de Heron

Luego $r.p = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

$$\boxed{r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}}$$

CONSTRUCCIONES GEOMÉTRICAS.

1- *POR UN PUNTO TRAZAR UNA RECTA PERPENDICULAR A UNA RECTA.*

a- **Por un punto P exterior a la recta AB.**

Haciendo centro en P , describimos un arco de cia. De tal forma que corte a la recta en dos puntos……… M y N.

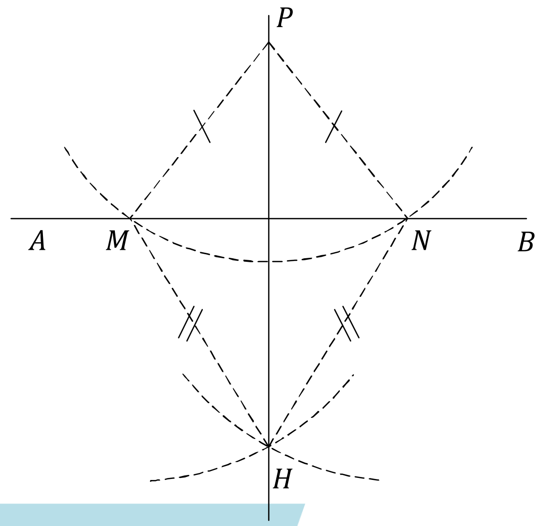
Luego tendremos ……………………………………….. $\overline{PM} = \overline{PN}$.

Con centro en M y luego en N, se toman dos arcos de cias. iguales que se cortan en H.

Luego $\overline{HM} = \overline{HN}$.

Entonces $\overline{PH}$ será la mediatriz de $\overline{MN}$

y $PH \perp AB$ será la $\perp$ buscada



b- **Por un punto P perteneciente a la recta AB.**

Sea P un punto de la recta AB.

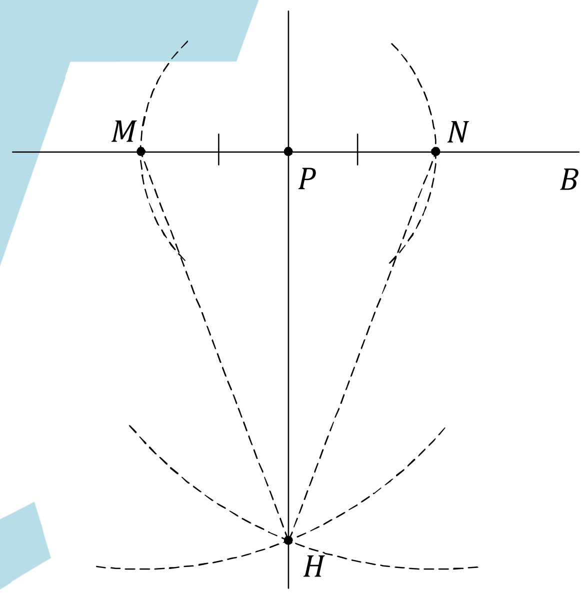
Haciendo centro en el punto P y con un mismo radio determinamos los puntos M y N.

Luego $\overline{PM} = \overline{PN}$

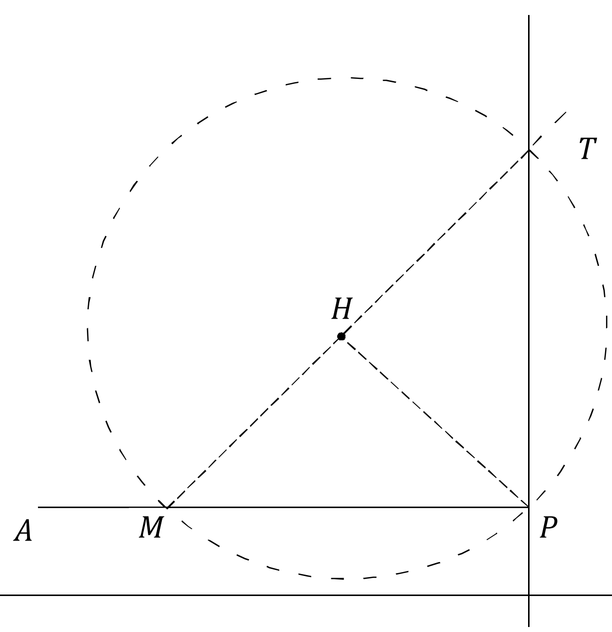
Haciendo centro en M y luego en N y con radios iguales describimos los arcos que se cortan en H… Luego $\overline{HM} = \overline{HN}$

PH será la mediatriz del segmento $\overline{MN}$

PH ……………………………será la $\perp$ buscada.



c- **Por un punto P ubicado en el extremo de un segmento y sin prolongar el segmento.**



Sea H un punto cualquiera. Haciendo centro en H y con radio igual a $\overline{HP}$ trazamos la cia., quedando determinado el punto M.

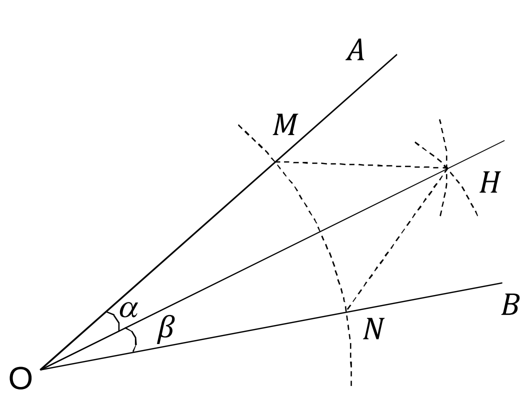
Trazando MH queda determinado el punto T de la cia.

El ángulo $\overset{\angle}{MPT}$ inscripto en una semi-cia.

$\overset{\angle}{MPT} = 1 \angle$Rto.

Luego $\overline{TP}$ ……………………..es la $\perp$ buscada.

2- *TRAZAR LA BISECTRIZ DE UN ÁNGULO.*



Sea el ángulo $\overset{\angle}{AOB}$

Con centro en O y con un radio cualquiera, trazamos un arco de cia, que corta a los lados del ángulo OA y OB en M y N respectivamente.

Luego $\overline{OM} = \overline{ON}$

Haciendo centro en M y N y con arcos de cia. de radios iguales determinamos el punto H.

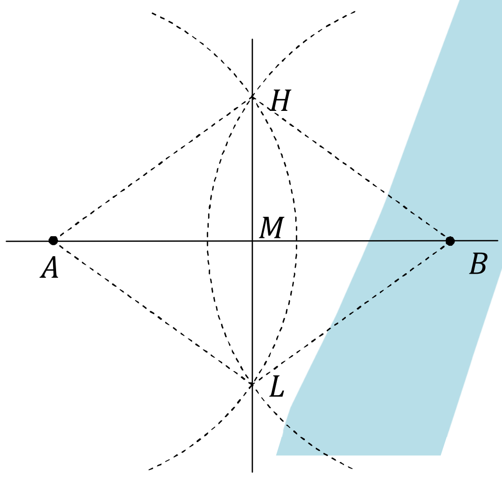
Luego $\overline{NH} = \overline{MH}$

De esta forma tendremos $\overset{\Delta}{ONH} = \overset{\Delta}{OMH}$.................. Por tener los tres lados iguales

Luego .... $\overset{\angle}{\alpha} = \overset{\angle}{\beta}$.................... Por tanto OH será la bisectriz buscada.

3- *HALLAR EL PUNTO MEDIO M DE...*

a- **Un segmento de recta:** Sea el segmento de recta $\overline{AB}$



Haciendo centro en A y luego en B, describimos dos arcos de cia. de radios iguales. (Pero mayor que la mitad del segmento).

De esta forma quedan determinados los puntos H y L.

Luego: $\begin{cases} \overline{HA} = \overline{HB} \\ \overline{LA} = \overline{LB} \end{cases}$

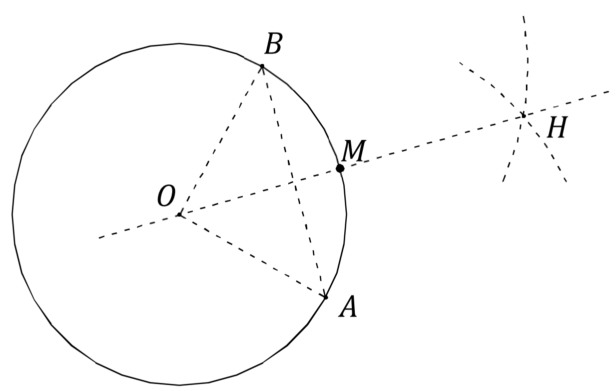
Por tanto H y L serán puntos de la mediatriz del segmento AB.

Trazando de recta HL queda determinado el punto M perteneciente a la mediatriz y equidistando de los extremos.

Por tanto M es el punto buscado.

b- **Un arco de cia.:** Sea el arco $\overset{\frown}{AB}$ de la cia de centro O

Trazamos la cuerda $\overline{AB}$



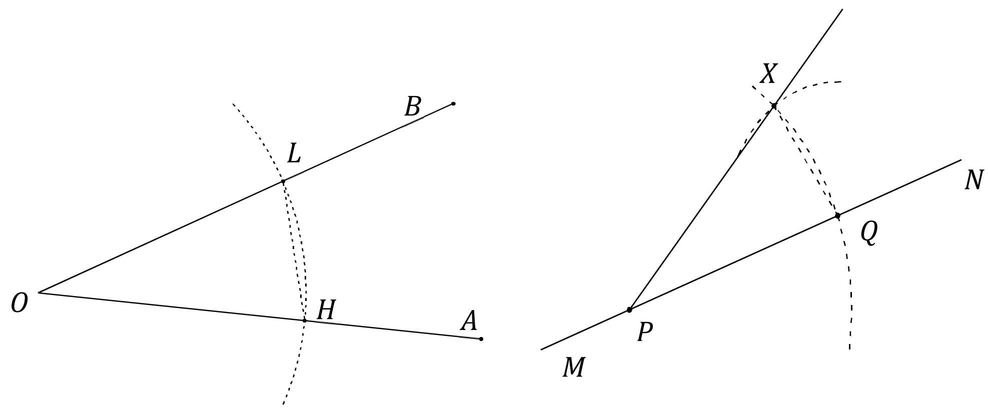
Por el teorema "Si por el centro de la cia se traza una $\perp$ a una cuerda, dicha $\perp$ biseca la cuerda y el arco subtendido"

Luego debemos hallar la mediatriz de $\overline{AB}$

Haciendo centro en A y luego en B y con radios iguales determinamos H.

OH será la mediatriz de AB y M el punto buscado.

4- *POR UN PUNTO DE UNA RECTA TRAZAR UNA SEMI RECTA QUE FORME UN ÁNGULO IGUAL A UN ÁNGULO DADO.*



Sea el ángulo $\overset{\angle}{AOB}$ y el punto P perteneciente a la recta MN.

Haciendo centro en O y P y con radios iguales trazamos dos arcos de cias.

En el ángulo $\overset{\angle}{AOB}$queda determinado el arco $\overset{\frown}{HL}$ que subtiende de la cuerda $\overline{HL}$

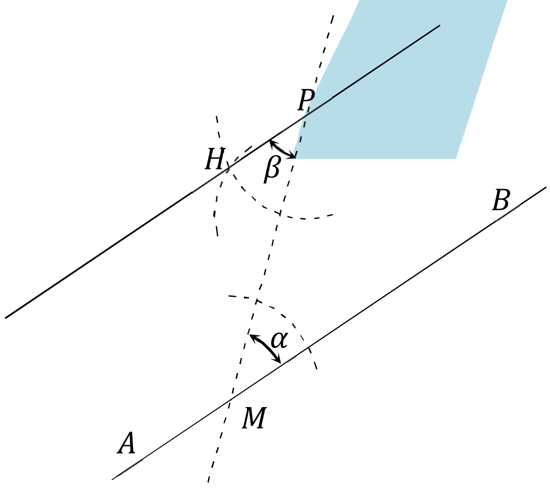
En la recta MN queda determinado el punto Q.

Haciendo centro en Q y con radio igual a $\overline{HL}$, determinamos el punto X.

Entonces $\overline{HL} = \overline{QX}$.........................."Porque en una misma cia o en cias de radios iguales, cuerdas iguales subtienden arcos iguales y ángulos centrales iguales"

Luego $\overline{PX}$ será la semi recta buscada y .... $\overset{\angle}{XPQ} = \overset{\angle}{AOB}$

5- *POR UN PUNTO EXTERIOR A UNA RECTA TRAZAR UNA PARALELA A ELLA.*



Sea AB una recta y P un punto exterior a dicha recta.

Trazamos por el punto P una recta transversal de AB siendo M el punto de intersección.

Queda formado el ángulo α.

Por el punto P se construye un ángulo $\overset{\angle}{\beta} = \overset{\angle}{\alpha}$

Haciendo centro en M y P y con radios iguales se trazan arcos iguales.

Luego igualando las cuerdas tendremos el ángulo $\overset{\angle}{\beta} = \overset{\angle}{\alpha}$.

Estos ángulos son alternos internos.

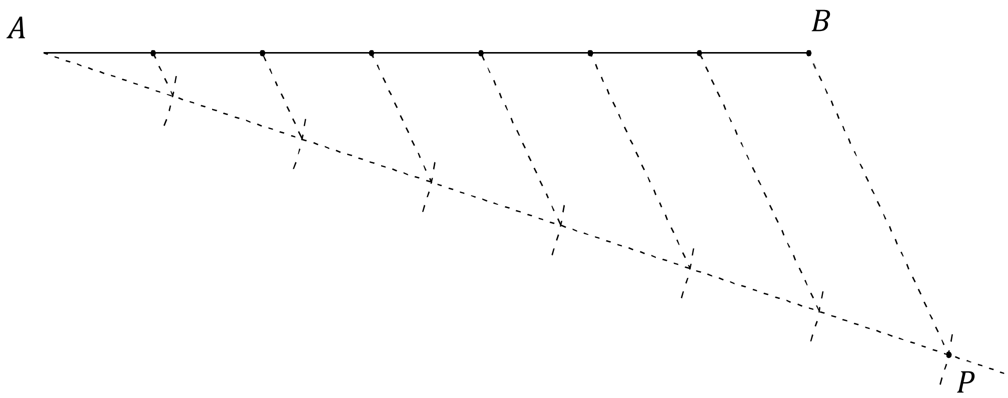
Por tanto PH ....es la paralela buscada.

OBS: Otro procedimiento seria: Trazar una 1º $\perp$ a la recta AB.

Luego por P trazar otra $\perp$ a la primera perpendicular.

"Dos rectas $\perp$s a una tercera son paralelas entre sí "

6- *DIVIDIR UN SEGMENTO DE RECTA EN UN NÚMERO DADO DE SEGMENTOS IGUALES*



Sea el segmento $\overline{AB}$ para dividir en n partes iguales.

Por uno de los extremos A trazamos una recta cualquiera AP.

Con ayuda del compás, y a partir de A tomamos n veces en forma consecutiva un segmento cualquiera. Siendo P el extremo del último segmento.

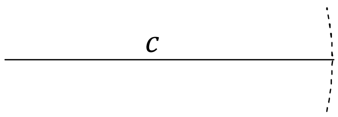
Trazamos PB y por cada uno de los puntos de separación de los segmentos en la recta cualquiera AP, trazamos paralelas a PB.

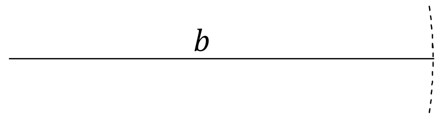
Estas paralelas determinan en $\overline{AB}$ n segmentos iguales, por el teorema que dice: "Si los segmentos determinados en una transversal por tres o más paralelas son iguales, lo serán también los determinados en otra transversal por las mismas paralelas"

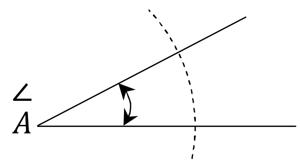
7- *<u>CONSTRUIR UN TRIÁNGULO, DADOS:</u>*

a- **<u>Dos lados y el ángulo comprendido:</u>**

Sean los segmentos



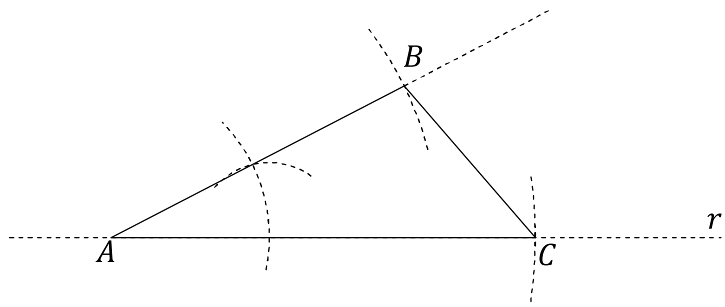
;


y


Sobre una recta r construimos, el ángulo $\angle A$, haciendo coincidir un lado con r.

Haciendo centro en el punto A de la recta y con radio igual a b, y marcamos el punto C.

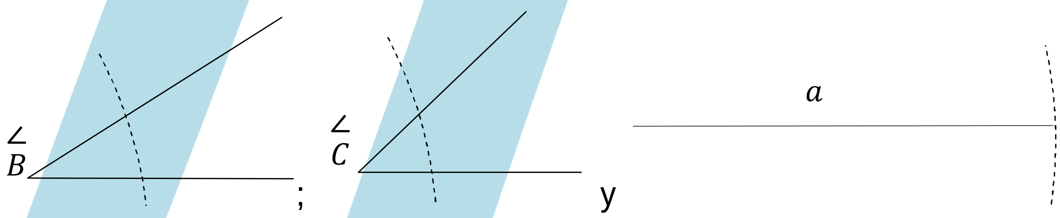
Haciendo centro en A y con radio igual a C marcamos el punto B en el otro lado del ángulo.

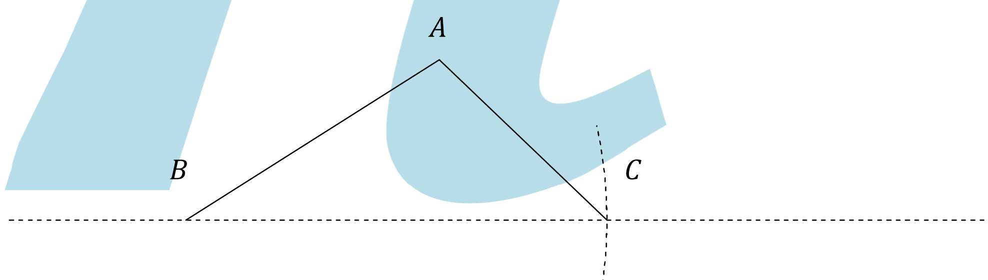


El triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$ ....es el triángulo pedido.

b- **<u>Un lado y los dos ángulos contiguos:</u>**

Sean los ángulos





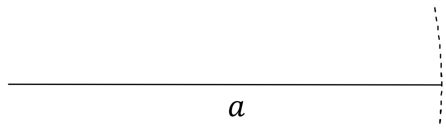
En una recta cualquiera r, a partir del punto B y con radio igual a “a”, marcamos el punto C.

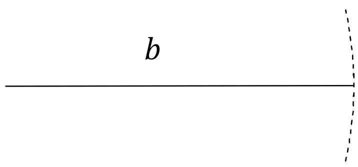
En el vértice B construimos el ángulo $\angle B$ y en el punto C, el ángulo $\angle C$.

La intersección de los lados que no están en r es el vértice A.

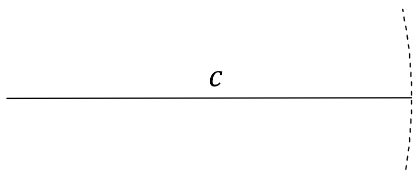
$\overset{\Delta}{ABC}$ ....Es el triángulo buscado.

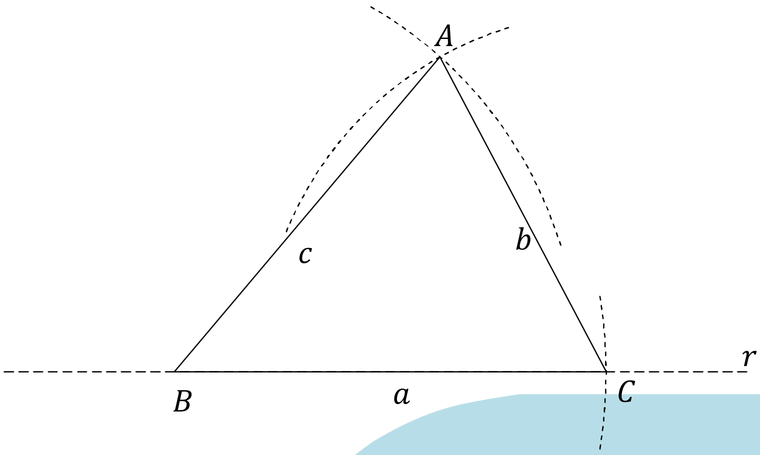
c- **Los tres lados:** Sean los segmentos





y





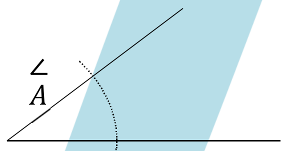
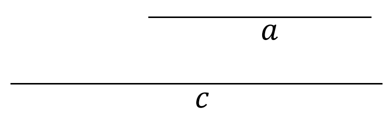
Sobre una recta r y haciendo centro en un punto B de dicha recta y con radio igual a a, marcamos el punto C.

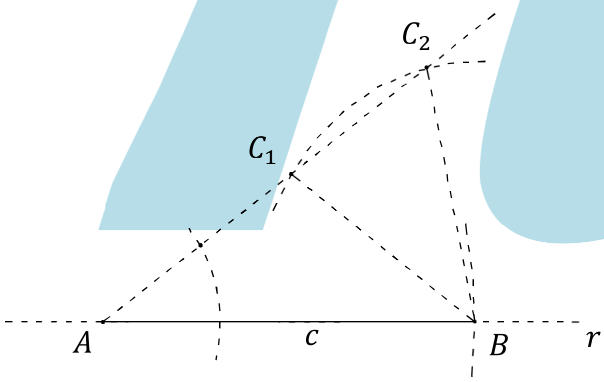
Haciendo centro en B y con radio igual a c trazamos un arco de cia.

Haciendo centro en C y con radio igual a b trazamos otro arco de cia. De tal forma que se corte con la anterior. La intersección de los arcos será el punto A.

$\overset{\Delta}{ABC}$ ....Es el triángulo buscado.

d- **Dados dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos.**

Sea el ángulo  y los segmentos 

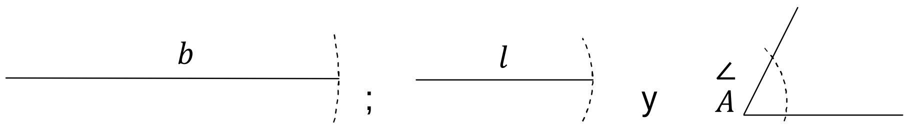


En la recta r teniendo por vértice el punto A construimos el ángulo $\overset{\angle}{A}$.
Con centro en A y con radio igual a c marcamos en r el punto B.

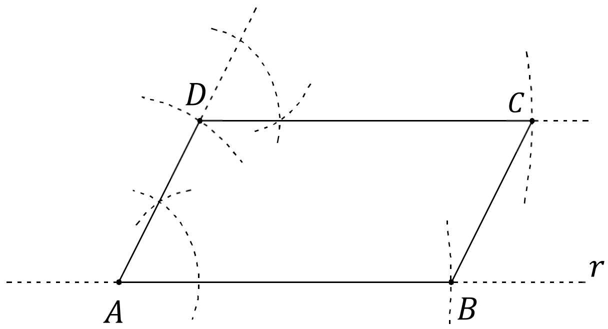
Haciendo centro en B y radio igual a a determinamos los puntos C_1 y C_2 y tendremos dos soluciones.

Los $\overset{\Delta}{ABC_1}$ y/o $\overset{\Delta}{ABC_2}$ son soluciones.

8- *<u>CONSTRUIR UN PARALELOGRAMO, DADOS LOS LADOS Y EL ÁNGULO COMPRENDIDO.</u>*

Sean los segmentos 

En la recta r y haciendo centro en el punto A y con un radio igual a b marcamos el punto B.



Con vértice en A y un lado coincidiendo con r, construimos el ángulo $\overset{\angle}{A}$.

A partir de A y sobre el lado no coincidente con r tomamos una longitud igual a l, determinando el punto D.

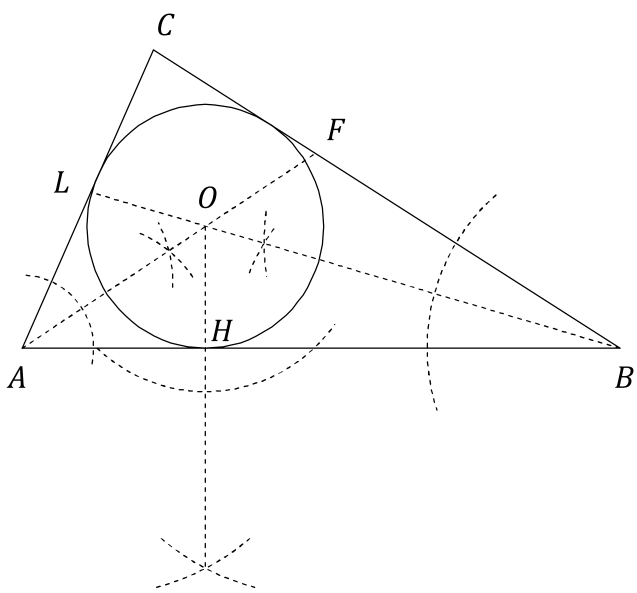
Por el punto D trazamos una paralela a AB (Ángulos correspondientes).

Con centro en D y radio igual a b marcamos en dicha paralela el punto C.

$\overset{\square}{ABCD}$ .... Es el paralelogramo buscado.

9- *DADO UN TRIANGULO*

a- **Construir la cia. Inscripta al triángulo:**



Sea el triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$.

Trazamos las bisectrices de los ángulos $\overset{\angle}{A}$ y $\overset{\angle}{B}$.

Sean AF y BL dichas bisectrices que se intersectan en O.

Por el punto O trazamos una $\perp$ a AB, siendo H el punto de intersección.

Haciendo centro en O y con radio igual al segmento OH describimos una cia que será la cia inscripta en el triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$

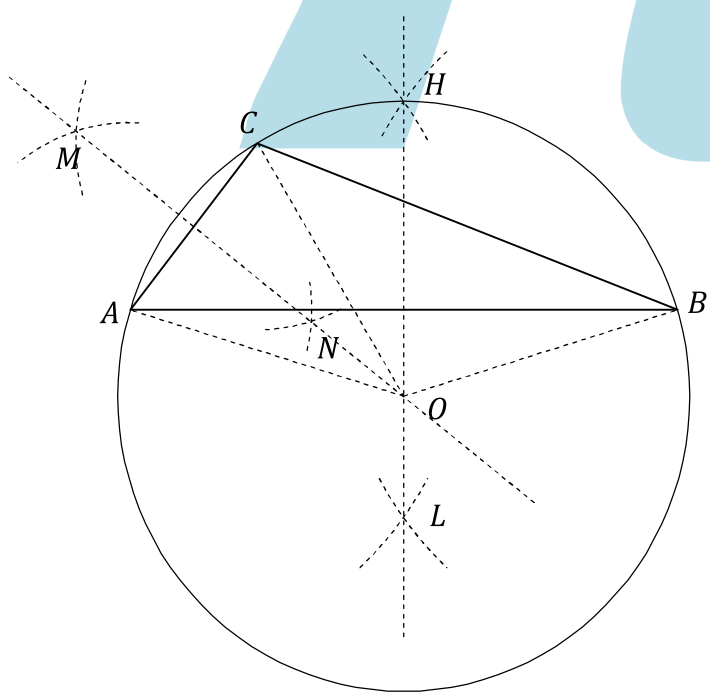
El segmento $\overline{OH}$ es la distancia del punto O a $\overline{AB}$.

El punto O por pertenecer a la bisectriz BL equidista de BC y BA

Por pertenecer a la bisectriz AF equidista de AB y AC.

Luego equidista de los tres lados.

b- Construir la cia circunscripta al triangulo:



Sea el triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$.

Construimos las mediatrices de los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$, y sean HL y MN dichas mediatrices.

Estas mediatrices se encontraran en un punto O, puesto que son perpendiculares a dos rectas concurrentes.

El punto O por pertenecer a la mediatriz HL equidista de los vértices A y B es decir $\overline{OA} = \overline{OB}$

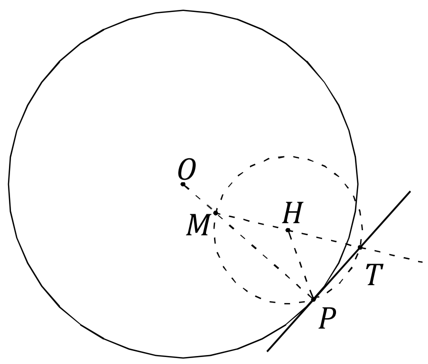
Y por pertenecer a la mediatriz MN equidista de A y C, es decir $\overline{OA} = \overline{OC}$.

Luego equidista de los tres vértices del triángulo.

Con centro en O y radio igual a $\overline{OA}$ trazamos la cia, que será la cia circunscripta al triangulo $\overset{\Delta}{ABC}$.

10- *TRAZAR UNA RECTA TANGENTE A UNA CIA POR PUNTO DADO:*

a- **El punto pertenece a la cia.**



Sea la cia de centro O y punto P perteneciente a dicha cia.

Trazamos el radio $\overline{OP}$.

Por el punto P trazamos una perpendicular al radio OP.

Por un punto cualquiera H y radio $\overline{HP}$ trazamos una cia.

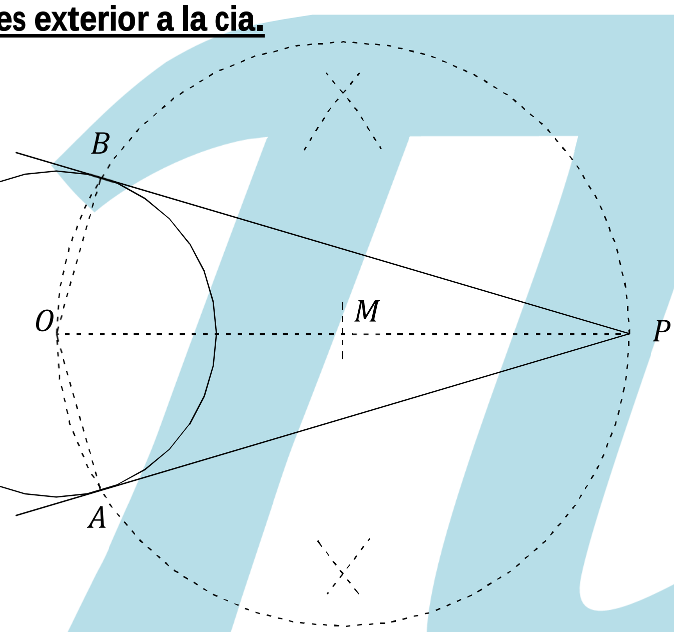
Unimos MH y determinamos el punto T.

La recta TP será la tangente a la cia buscada.

PT será perpendicular al radio OP en el punto P.

Porque el ángulo $\overset{\angle}{MPT}$ está inscripto en una semi-circunferencia.

b- **El punto es exterior a la cia.**



Sea la cia de centro O y el punto P exterior a dicha cia.

Trácese OP y determínese la mediatriz de dicho segmento.

Sea M intersección de la mediatriz con OP.

Con centro en M y radio $\overline{OM}$ trácese una cia que corte o intersecte en A y B a la cia de centro O.

A y B son los puntos de tangencia.

AP y BP son tangentes a la cia.

Uniendo el punto O con A y B tendremos los radios $\overline{OB}$ y $\overline{OA}$ de la cia O.

$\overline{OP}$ Es diámetro de la cia M.

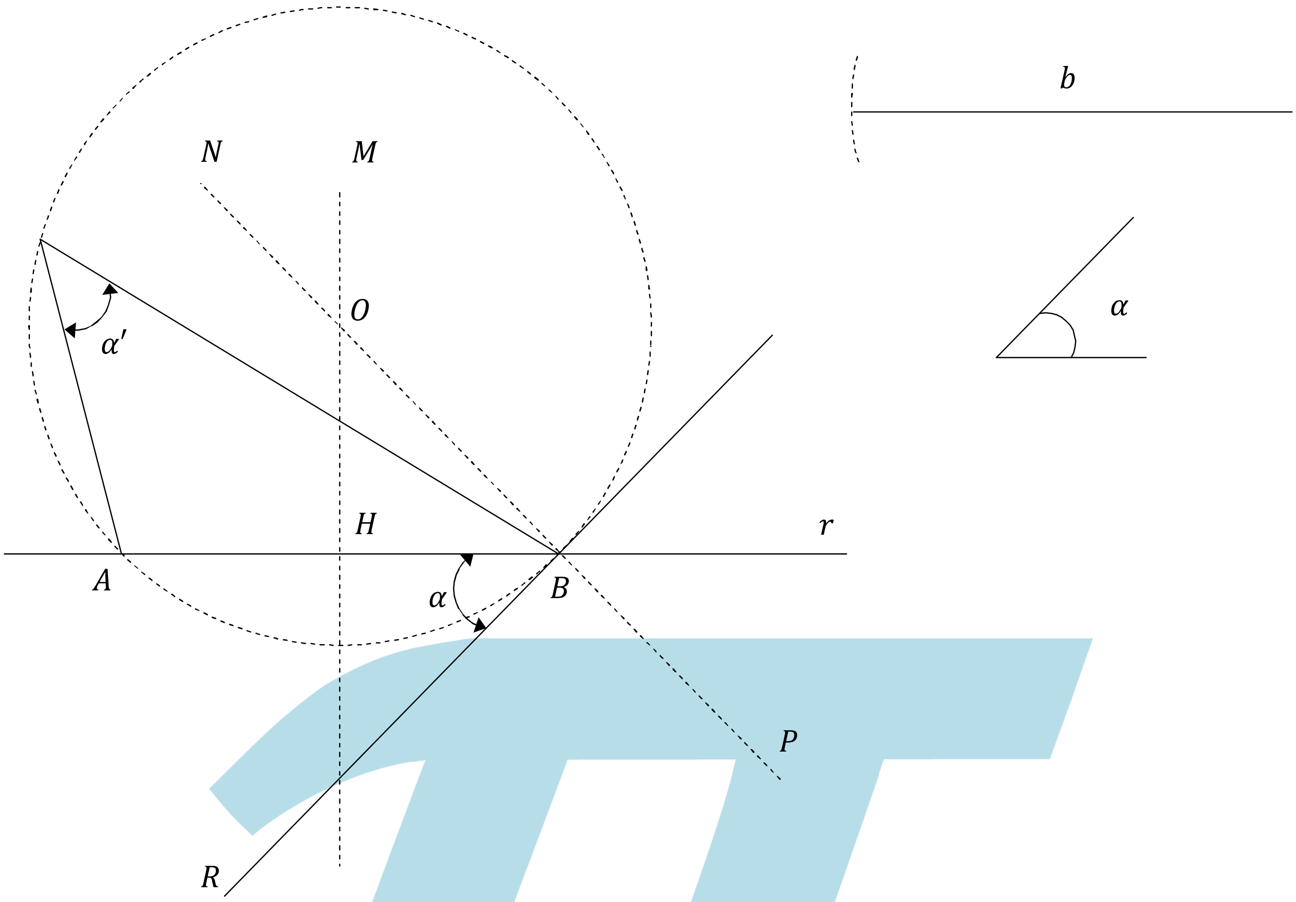
Luego $\overset{\angle}{OBP} = 1\,Rta$.................... Por ser ángulo inscripto en una semi-circunferencia.

Entonces $PB \perp OB$.......................... En el extremo del radio.

PB es tangente a la cia.

Análogamente PA es tangente.

11- *CONSIDERANDO UN SEGMENTO DE RECTA COMO CUERDA, TRAZAR UN ARCO CAPAZ DE CONTENER UN ÁNGULO DADO.*



En una recta r determinamos el segmento AB de longitud igual a b.

Por B trazamos una recta BR que forme un ángulo α con la recta r.

Por B trazamos la recta $NP \perp BR$.

Trazamos la mediatriz del segmento $\overline{AB}$ y sea MH dicha mediatriz.

O es la intersección de NP con la mediatriz MH.

El punto O es el centro de la cia que contiene el arco capaz de contener el ángulo dado.

$\overline{OA} = \overline{OB} =$ radio de la cia.

Demostración:

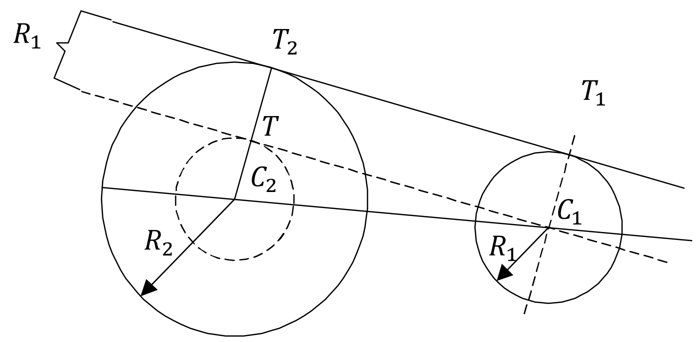
Siendo $\alpha = \overset{\angle}{ABR}$ por construcción..............$\alpha = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AB}$..............Por ser ángulo semi-inscripto en una cia.

Y cualquier ángulo que tenga por vértice un punto de la cia y sus lados pasen por los puntos A y B, será igual a α, por subtender el arco $\overset{\frown}{AB}$

Luego $\overset{\angle}{\alpha} = \overset{\angle}{\alpha'}$

12- *TRAZAR UNA TANGENTE COMÚN A DOS CIAS DADAS.*

a- **Tangente exterior:**



DATOS: $\begin{cases} C_1 \dots \dots \dots R_1 \\ C_2 \dots \dots \dots R_2 \end{cases}$

Con centro en C_2 trazamos una cia de radio $R = R_2 - R_1$

Por el punto C_1 trazamos la recta tangente en T a la cia de radio R.

Trazamos C_2T que intercepta a la cia C_2 en T_2..........$C_2T \perp TC_1$

Por C_1 trazamos la recta perpendicular a C_1T, que intercepta a la cia de radio R_1, en el punto T_1.

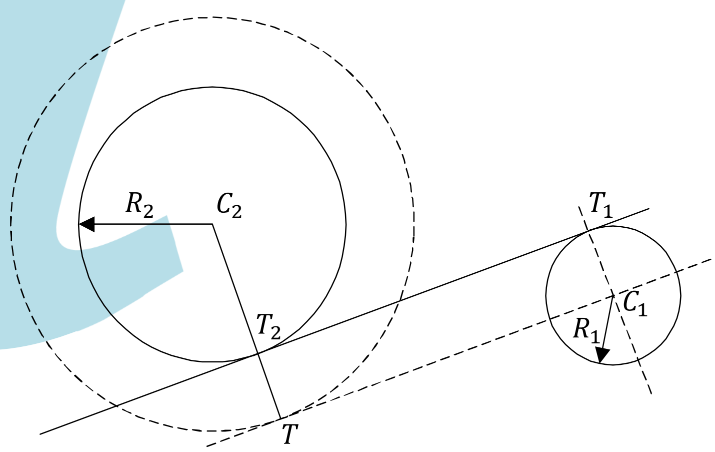
Por construcción tenemos $\begin{cases} \overline{TT_2} = \overline{C_1T_1} = R_1 \dots \dots \text{Por construcción.} \\ \overline{TT_2} \parallel C_1T_1 \dots \dots \dots \dots \dots \text{Porque ambos son perpendiculares a } TC_1 \end{cases}$

Luego $TT_2T_1C_1$ es un paralelogramo y en especial un rectángulo.

Y C_2T_2 ; C_1T_1 serán las perpendiculares a T_2T_1 y también sus radios respectivos.

Luego T_2T_1 ....será la tangente común a las dos cias.

b- **Tangente interior:**



DATOS: $\begin{cases} C_1 \dots \dots \dots R_1 \\ C_2 \dots \dots \dots R_2 \end{cases}$

Con centro en C_2 trazamos una cia de radio $R = R_1 + R_2$

Por el punto C_1 trazamos la recta tangente en T a la cia de radio R.

Luego $C_2T \perp TC_1$

T_2 Intersección de C_2T con la cia de radio R_2

Por C_1 trazamos la recta perpendicular a C_1T, que intersecta a la cia de radio R_1 en el punto T_1.

Debido a que $\begin{cases} T_2T = C_1T_1 = R_1 \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \text{Por construcción} \\ T_2T \parallel C_1T_1 \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \text{Por ser perpendicular a } TC_1 \end{cases}$

Luego $\square TT_2T_1C_1$ es un paralelogramo y en especial un rectángulo.

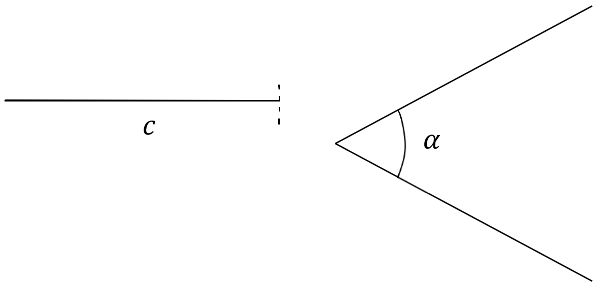
C_1T_1 y C_2T_2 son radios y perpendiculares T_1T_2.

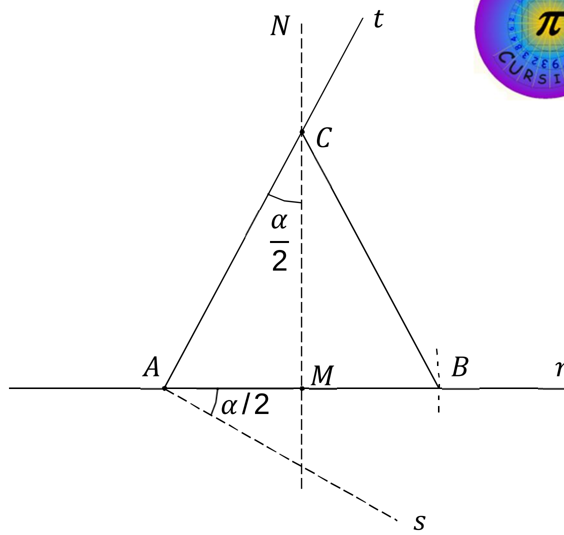
Por tanto T_1T_2 tangente interior.

13- *CONSTRUIR UN TRIANGULO ISOSCELES.*

a- **Dados la base y el ángulo opuesto al mismo.**

Datos:





En una recta r consideramos el segmento $\overline{AB}$ de longitud igual a c.

Por A trazamos la recta s que forma un ángulo $\frac{\alpha}{2}$ con r

Por A trazamos una recta t perpendicular a s.

Sea MN la mediatriz del segmento $\overline{AB}$

La intersección de MN y t será el punto C

$\overset{\angle}{ACM} = \frac{\alpha}{2}$......................... Por tener sus lados respectivamente perpendiculares.

$\overset{\angle}{MCB} = \overset{\angle}{ACM}$..................... Por igualdad de triángulos rectángulos.

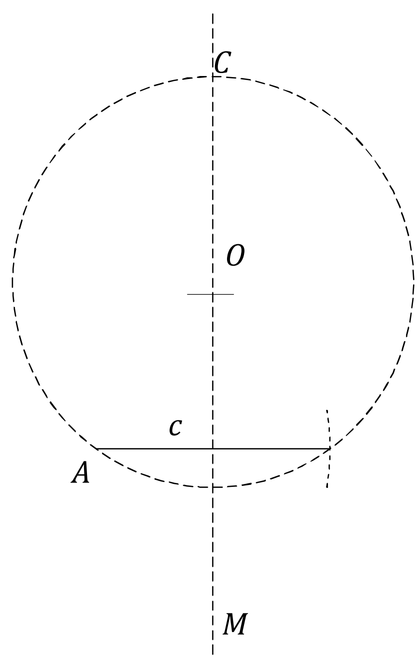
$$\begin{cases} \overset{\angle}{ACB} = \overset{\angle}{\alpha} \\ \overline{AB} = c \end{cases}$$

Luego .... $\overset{\Delta}{ABC}$ ....es el triángulo isósceles pedido.

OBS: Este triángulo podríamos construir por medio del arco capaz de contener el ángulo α y la cuerda c, luego trazamos la mediatriz del segmento c y tendremos el triángulo.

b- **Dado el lado desigual y el radio de la cia circunscripta.**

Datos:



Consideremos la cia de radio R y centro O.

Determinamos una cuerda $\overline{AB}$ de longitud igual a c.

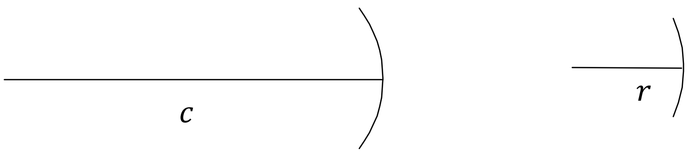
Trazamos la recta M mediatriz de $\overline{AB}$

C es el punto de intersección de M y la cia O

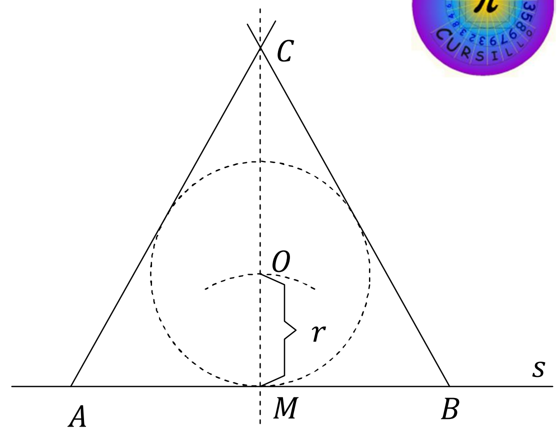
$\overline{AB} = c$	Por construcción
$\overline{OA} = \overline{OB} = R$	Por construcción
$\overline{OC} = R$	Por ser c intersección de mediatriz y cia.
$\overline{AC} = \overline{BC}$	Por definición de mediatriz.

Luego.............................. $\overset{\Delta}{ABC}$ ....es el triángulo isósceles pedido.

c- **El lado desigual y el radio de la cia inscripta:**



Datos:



En una recta s consideramos un segmento $\overline{AB}$ de longitud igual a c.

Trazamos la mediatriz del segmento $\overline{AB}$ determinando el punto M de $\overline{AB}$

Haciendo centro en M y con radio igual a r , determinamos el punto O de la mediatriz.

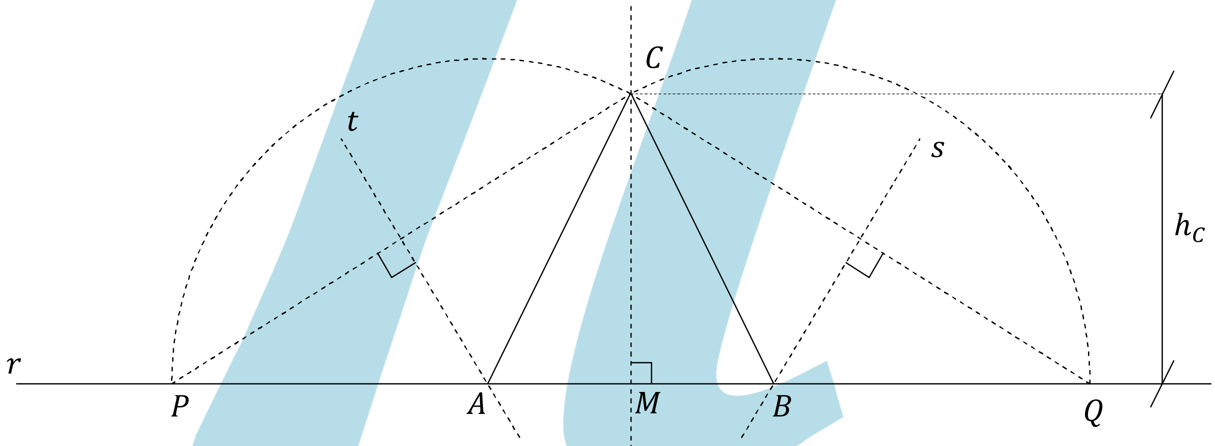
Con centro en O trazamos la cia. De radio r.

Por el punto A trazamos una recta tangente a la cia O

La intersección de esta tangente con la mediatriz determina el vértice C.

Uniendo C con B tendremos el $\overset{\angle}{ABC}$ que es el triángulo pedido.

d- **El perímetro y la altura relativa al lado desigual**



Datos: $\begin{cases} \text{Segmento } \overline{PQ} \text{ que es el perimetro} \\ \text{Segmento } h_c \text{ altura relativa a } c \end{cases}$

En una recta r consideramos $\overline{PQ}$ igual a la longitud del perímetro dado.

Trazamos la mediatriz del segmento $\overline{PQ}$ quedando determinado el punto M de $\overline{PQ}$.

Haciendo centro en M y con radio igual a h_c determinamos el punto C.

Consideramos los segmentos $\overline{CP}$ y $\overline{CQ}$ y trazamos sus mediatrices t y s respectivamente.

La intersección de t y r , determina el punto A.

La intersección de s y r , determina el punto B.

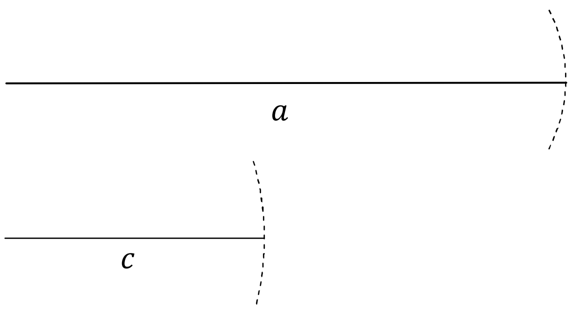
$\overset{\Delta}{ABC}$ Es el triángulo pedido......
$$\left.\begin{aligned} \overline{AP} &= \overline{AC} \\ \overline{AB} &= \overline{AB} \\ \overline{BQ} &= \overline{BC} \end{aligned}\right\} \quad \text{Perimetro dado}$$

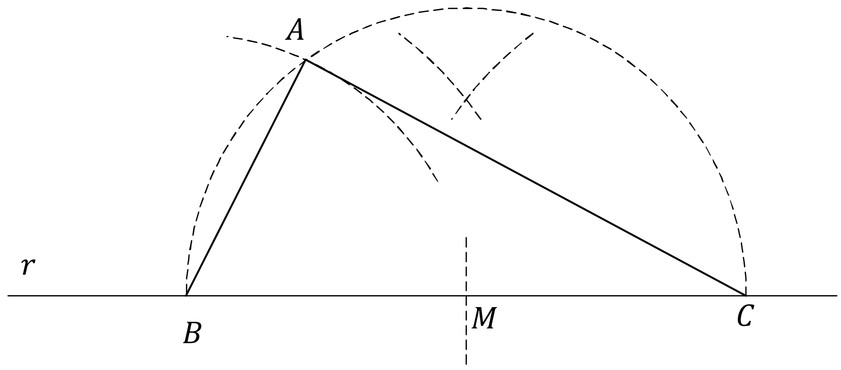
$$\overline{CM} = h_c \ldots\ldots\ldots \text{Por construcción}$$

14-*CONSTRUIR UN TRIANGULO RECTANGULO, DADOS:*

a- **La hipotenusa y un cateto.**

Datos:





En una recta r consideremos un segmento $\overline{BC}$ igual a la longitud de a.

Trazamos la mediatriz del segmento determinando el punto M de $\overline{BC}$

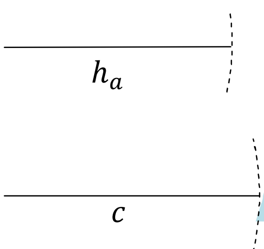
Haciendo centro en M trazamos la cia de radio $\frac{a}{2}$

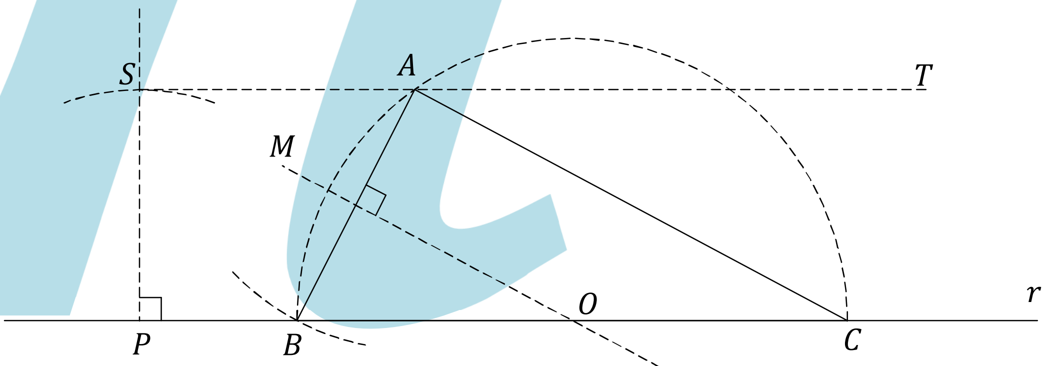
Con centro en el punto B y con radio igual a la longitud de c determinamos el punto A.

$\overset{\Delta}{ABC}$ .... Es el triángulo buscado.

b- **Un cateto y la altura relativa a la hipotenusa.**

Datos:





Consideremos una recta cualquiera r, y siendo P uno de sus puntos.

En el punto P trazamos una perpendicular a r.

Haciendo centro en P y con radio igual a la longitud ha determinamos el punto S.

Por el punto S trazamos ST paralela a la recta r.

Sea un punto A un punto cualquiera de dicha paralela.

Haciendo centro en A y con radio igual a la longitud de c determinamos el punto B.

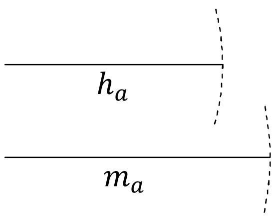
Trazamos la mediatriz M del segmento $\overline{AB}$ que intersecta r en O.

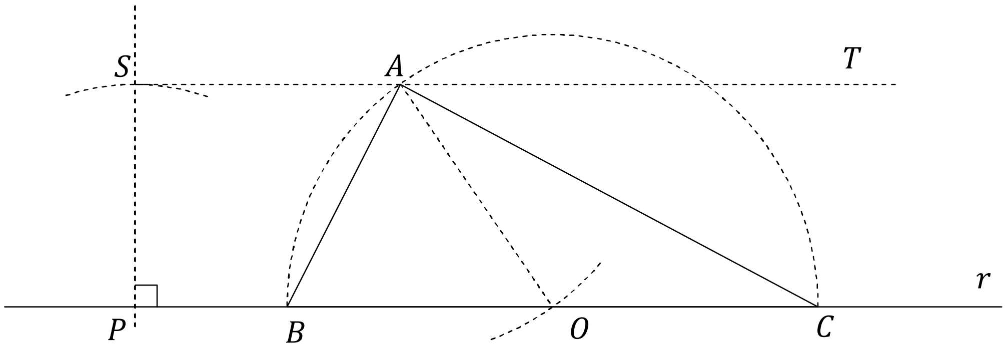
Haciendo centro en O y con radio igual a $\overline{OB}$, trazamos la semi circunferencia que intersecta a r en C.

$\overset{\Delta}{ABC}$ ....Es el triángulo pedido.

c- La mediana y la altura relativa a la hipotenusa.

Datos:





Consideremos la recta r y siendo P un punto cualquiera de ella.

Trazamos por P una perpendicular a la recta r.

Haciendo centro en P y con radio igual a la longitud de h_a, determinamos el punto S.

Por el punto S trazamos ST paralela a r.

Sea A un punto cualquiera de dicha paralela.

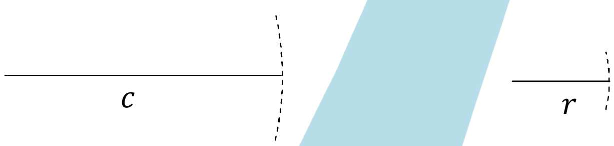
Haciendo centro en A y con radio igual a la longitud de m_a, determinamos en r el punto O.

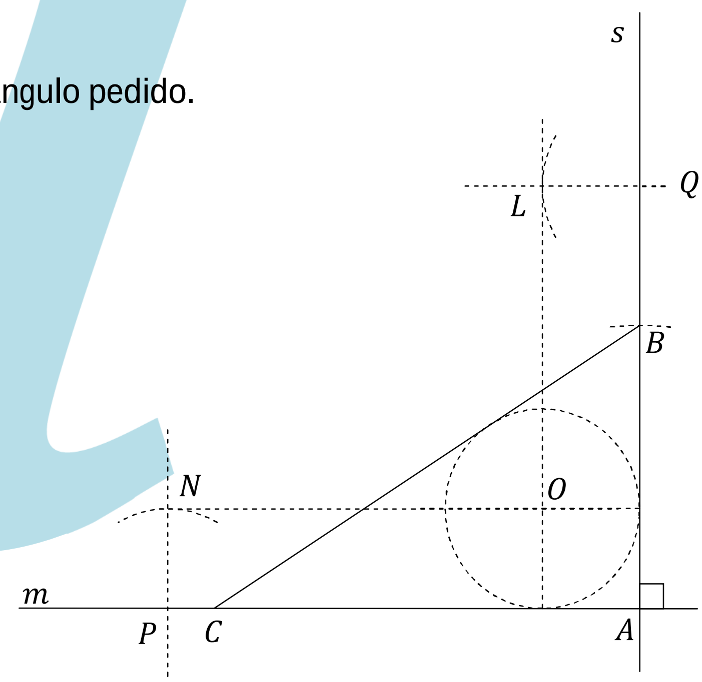
Haciendo centro en O y con radio igual a $\overline{OA}$ describimos la semi circunferencia que corta a la recta r en B y C.

$\overset{\Delta}{ABC}$ ………………………………………………….Es el triángulo pedido.

d- Un cateto y el radio de la cia inscripta.

Datos:





Consideremos las rectas m y s perpendiculares entre si y que se cortan en el punto A.

Haciendo centro en A y con radio igual a la longitud c, determinamos el punto B.

Sean P y Q dos puntos cualesquiera de las rectas m y s respectivamente.

En los puntos P y Q trazamos las perpendiculares a m y s respectivamente.

Haciendo centro en P y con radio igual a r determinamos N.

Haciendo centro en Q y con radio igual a r determinamos L.

Por los puntos N y L trazamos paralelas a m y s respectivamente.

Estas paralelas se interceptan en el punto O.

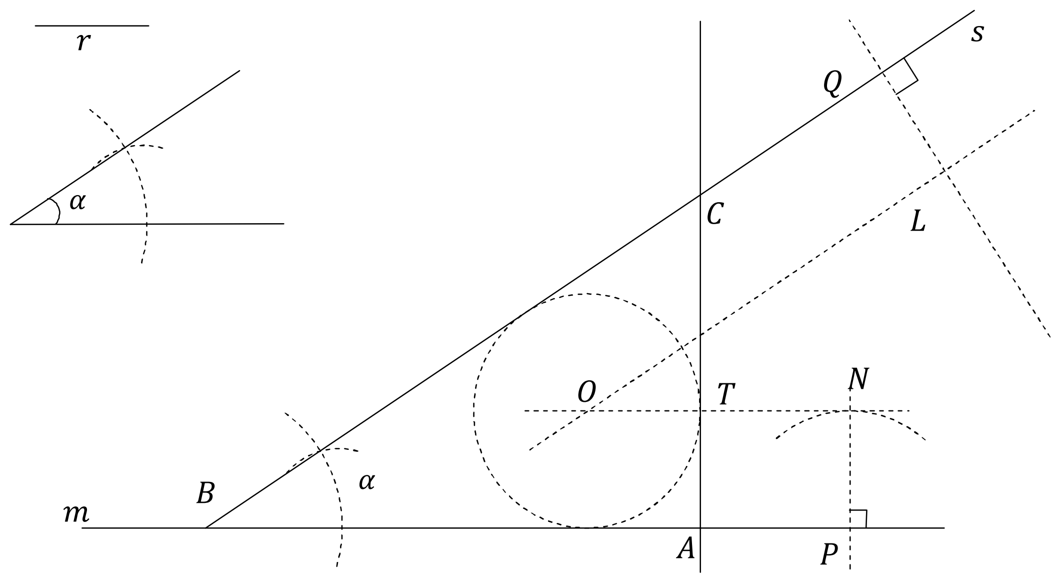
Haciendo centro en O y con radio igual a r describimos la cia O.

Por el punto B trazamos una tangente a la cia O que corta a la recta m en el punto C.

$\overset{\Delta}{ABC}$ ………………………………………………….Es el triángulo pedido.

e- **<u>El ángulo agudo y el radio de la cia inscripta.</u>**

Datos:



Consideremos la recta m... y sea B un punto cualquiera de m.

Por el punto B trazamos una recta s que forme con la recta m el ángulo α dado.

Sean P y Q dos puntos cualesquiera de las rectas m y s respectivamente.

Haciendo centro en P y con radio igual a r determinamos el punto N

Haciendo centro en Q y con radio igual a r determinamos el punto L.

Por los puntos N y L trazamos rectas paralelas a las rectas m y s respectivamente.

La intersección de estas rectas paralelas determinan el punto O.

Haciendo centro en O y con radio igual a r describimos las cia O.

Esta cia O corta a la recta paralela ON en el punto T.

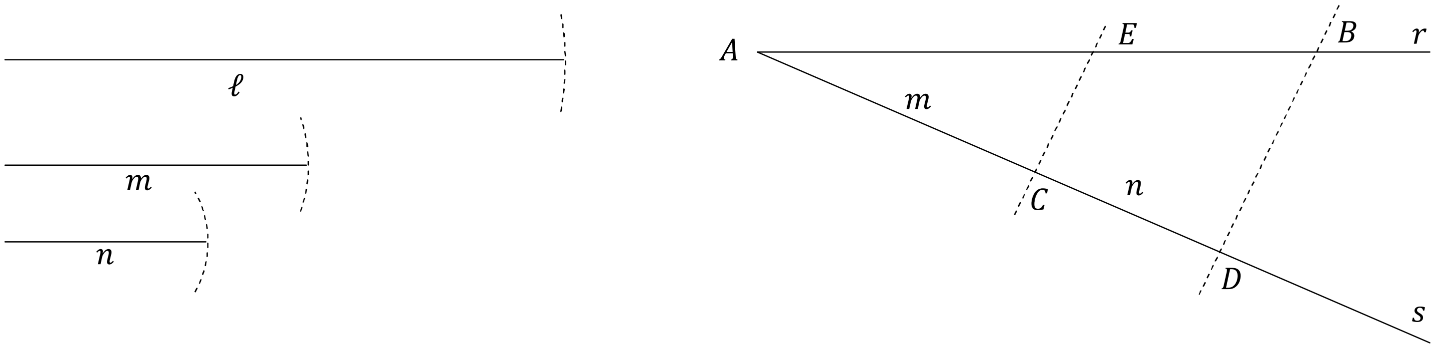
Por este punto T trazamos una recta perpendicular a m que lo intersecta en A.

Esta perpendicular por T intersecta a S en C.

$\overset{\Delta}{BAC}$.. Es el triángulo pedido.

15- *DIVIDIR EN SEGMENTO DE RECTA DADO EN SEGMENTOS PROPORCIONALES A OTROS DOS SEGMENTOS DE RECTA DADOS m y n.*

Datos:



Consideremos la recta r.

A partir de A determinamos el punto B de forma que sea igual a ℓ........$AB = \ell$

A partir del punto A trazamos una recta cualquiera s.

Haciendo centro en A y con radio igual a m determinamos el punto C.

Haciendo centro en C y con radio igual a n determinamos el punto D.

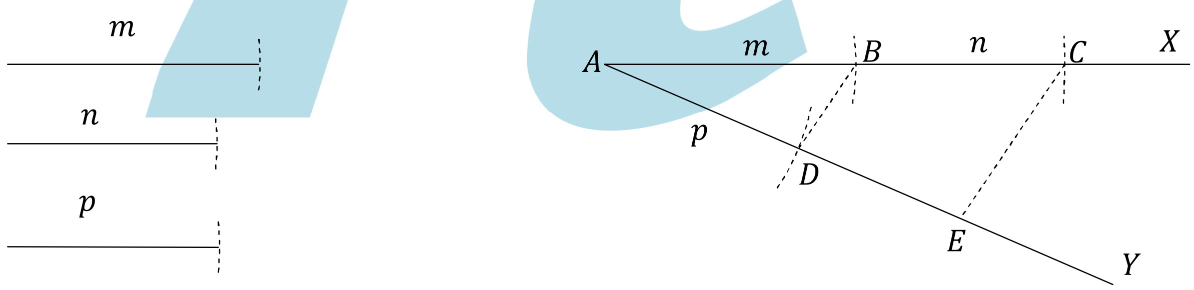
Trazamos la recta determinada por los puntos DB.

Por el punto C trazamos la recta paralela a DB que se intersecta con la recta AB en el punto E.

Los segmentos $\overline{AE}$ y $\overline{EB}$ son proporcionales a m y n.

16- *DETERMINAR LA CUARTA PROPORCIONAL DE TRES SEGMENTOS DE RECTAS, DADOS:*

Datos:



Consideremos dos rectas concurrentes cualesquiera AX y AY.

En AX, tómese

$\overline{AB} = m$ y $\overline{BC} = n$

En AY hagamos

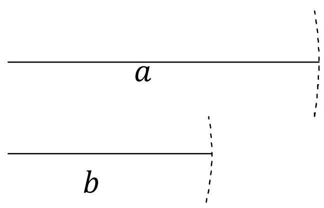
$\overline{AD} = p$

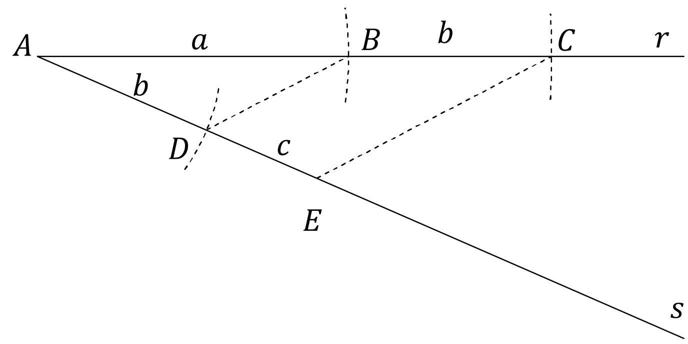
Trácese DB y por el punto C trazamos una paralela a DB, el punto E de intersección con AY nos determina el segmento $\overline{DE}$ que es el segmento pedido, es decir la cuarta proporcional buscada.

17- ***DETERMINAR LA TERCERA PROPORCIONAL DE DOS SEGMENTOS DE RECTAS, DADOS:***

a- <u>1º METODO:</u>

Datos:





Consideremos en la recta r, $\overline{AB} = a$ y $\overline{BC} = b$

Por el punto A trazamos una recta cualquiera s.

A partir de A, hacemos $\overline{AD} = b$

Unimos los puntos B y D.

Por el punto C trazamos una recta paralela a BD, quedando determinado el punto E de la recta s.

El segmento $\overline{DE} = c$ es la tercera proporcional de a y b.

En efecto "Si tres o más paralelas son cortadas por dos transversales, los segmentos determinados en dichas transversales son proporcionales"

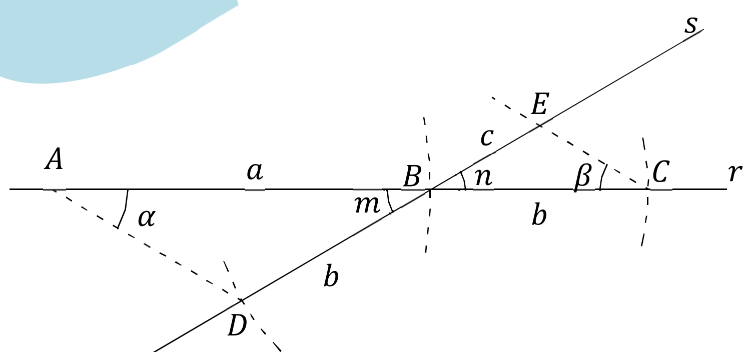
Es decir $\dfrac{a}{b} = \dfrac{b}{c}$ que es lo que pretendíamos.

Este es un caso particular de la cuarta proporcional.

b- <u>2º METODO: Cuando los segmentos dados son consecutivos.</u>

Sean $\overline{AB} = a$ y $\overline{BC} = b$ en la recta r.

Por el punto B trazamos una recta s cualquiera.
A partir del punto B y sobre la recta s determinamos el punto D, de tal forma que $\overline{BD} = b$. Trazamos la recta AD.



Por el punto C trazamos una recta paralela a AD que intersecta a la recta s en el punto E.

El segmento c es la tercera proporcional de a y b.

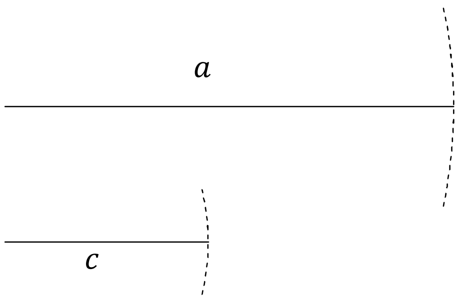
En efecto: Considerando los triángulos.

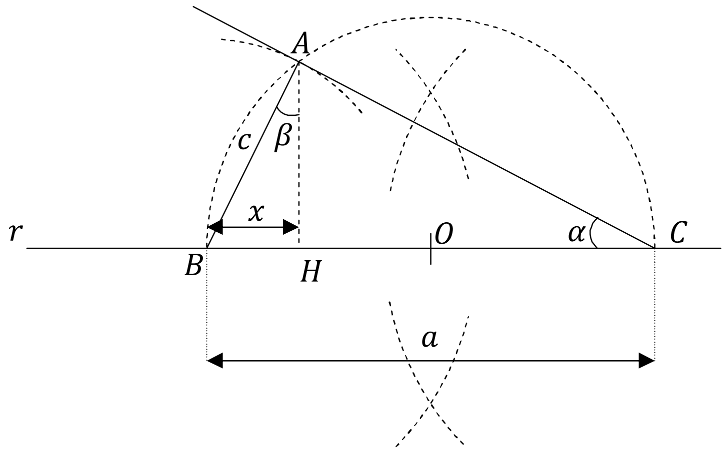
$\overset{\Delta}{\mathrm{ABD}} - \mathrm{S} - \overset{\Delta}{\mathrm{CBE}}$.....
- $\overset{\angle}{\alpha} = \overset{\angle}{\beta}$ … … Ángulos alternos internos detrminados por una transversal en rectas paralelas.
- $\overset{\angle}{\mathrm{m}} = \overset{\angle}{\mathrm{n}}$ … … … Ángulos opuestos por el vertice, luego serán semejantes por tener los 3 ángulos iguales.

Entonces podemos formar la propiedad. $\dfrac{a}{b} = \dfrac{b}{c}$

c- <u>3º METODO</u>: <u>Utilizando el método del triángulo rectángulo</u>

Datos:





Consideremos en la recta r el segmento $\overline{BC} = a$

Determinamos el punto medio del segmento $\overline{BC}$ y sea O dicho punto medio.

Haciendo centro en O y con radio igual a $\overline{OB} = \frac{a}{2}$, trazamos la semi circunferencia.

Haciendo centro en B y con radio igual a la longitud c, determinamos el punto A.

Uniendo los puntos A y C queda determinado el triángulo rectángulo en A, $\overset{\Delta}{BAC}$

Trazamos por el punto A, una perpendicular a la recta BC, la intersección de dicha perpendicular con BC determina el punto H.

$\overline{BH} = x$ Es el elemento tercera proporcional entre a y b buscado.

En efecto:

$$\overset{\Delta}{AHB} - S - \overset{\Delta}{BAC} \ldots\ldots \begin{cases} \overset{\angle}{\alpha} = \overset{\angle}{\beta} \ldots\ldots \text{Lados respectivamente perpendiculares,} \\ \text{Ambos triángulos son rectácgulos.} \\ \text{Luego serán semejantes por tener ángulos agudo igual.} \end{cases}$$

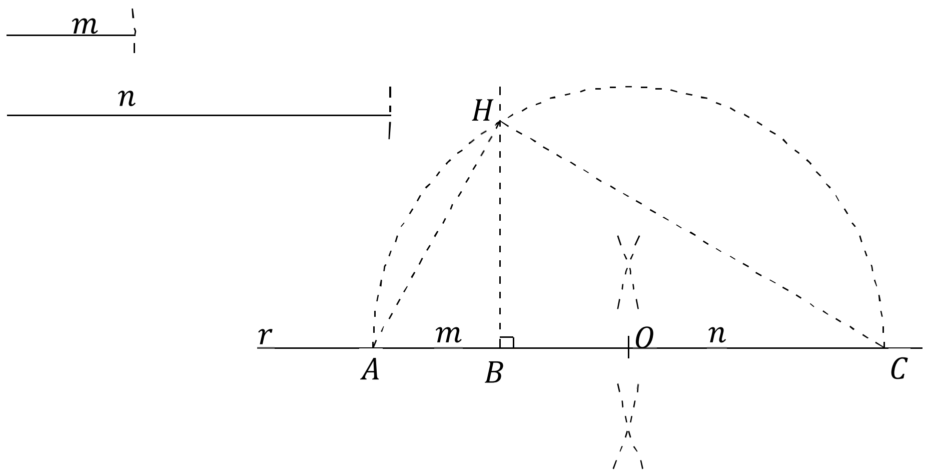
Formando la proporción

$$\boxed{\frac{c}{a} = \frac{x}{c}}$$

18- *DETERMINAR LA MEDIA PROPORCIONAL DE DOS SEGMENTOS DE RECTAS, DADOS:*

a- **Segmentos consecutivos:**

Datos:



Consideremos en la recta r el segmento $\overline{AB} = m$ y $\overline{BC} = n$

Determinamos el punto medio del segmento $\overline{AC}$ y sea O dicho punto medio.

Haciendo centro en O y con radio igual a $\overline{OA} = \frac{\overline{AC}}{2}$ describimos la semicircunferencia O.

En el punto B trazamos una recta perpendicular a AC, esta perpendicular intersecta la semicircunferencia en el punto H.

El segmento $\overline{HB}$ es la media proporcional entre m y n.

En efecto considerando el triángulo rectángulo en H, $\overset{\Delta}{AHC}$ y teniendo en cuenta el teorema: "La altura relativa a la hipotenusa es media proporcional entre los segmentos determinados en esta hipotenusa, es decir: $\overline{HB}^2 = \overline{m} \cdot \overline{n}$ "

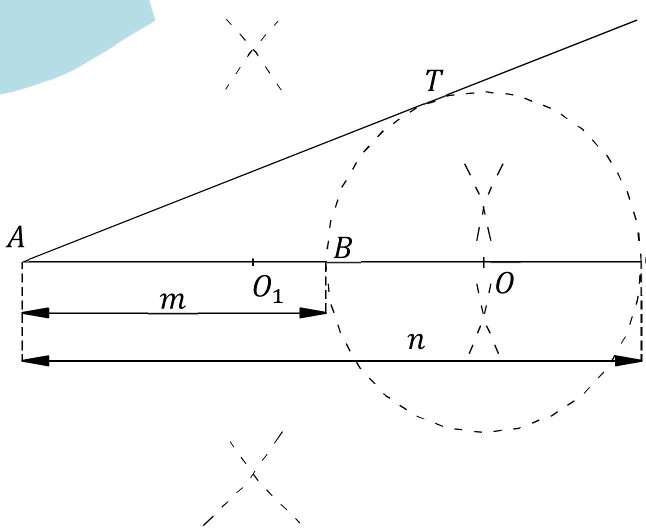
b- **Segmentos superpuestos con un extremo común.**

Sean los segmentos superpuestos $\overline{AB} = m$ y $\overline{AC} = n$

Sea O punto medio del segmento $\overline{BC}$.

Haciendo centro en O y con radio igual a $\overline{OB}$ trazamos la cia O.

Por el punto A trazamos una recta tangente a la cia O y sea T el punto de tangencia.



$\overline{AT}$ Es el segmento media proporcional entre m y n buscado.

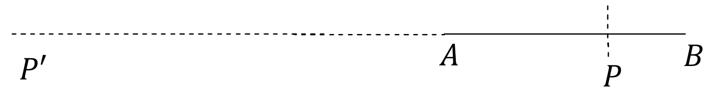
En efecto: "Si por un punto exterior a un circulo se trazan una secante y una tangente, el segmento de tangente es media proporcional entre los segmentos de la secante"

Es decir.................................$\overline{AT}^2 = \overline{AB} \times \overline{AC}$

19- *DIVIDIR UN SEGMENTOEN MEDIA Y EXTREMA RAZÓN (División áurea)*

Definición: Dividir un segmento $\overline{AB}$ en media y extrema razón, es hallar un punto P (interior o exterior al segmento), tal que su distancia al origen A sea media proporcional entre su distancia al extremo B y el segmento $\overline{AB}$.

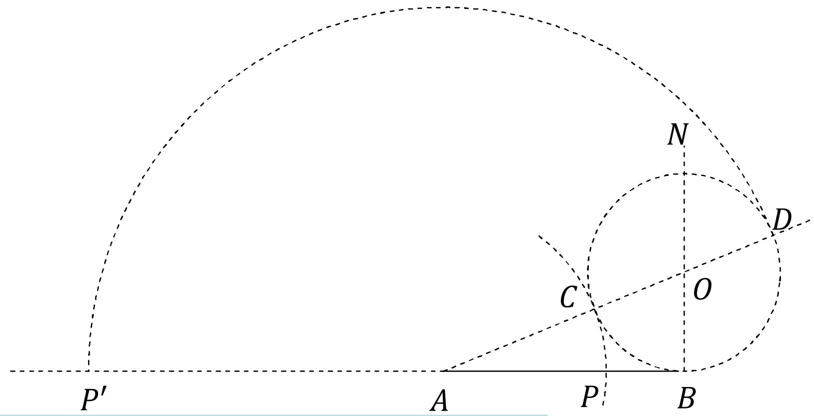
$$\overline{AP}^2 = \overline{PB} \times \overline{AB} \ldots \ldots$$
$$(\overline{AP'})^2 = (\overline{P'B}) \times \overline{AB}$$



Análisis y fundamento teórico.

$\overline{AP} = \overline{AC}$

$\overline{AP'} = \overline{AD}$



Sea $\overline{AB}$ el segmento dado. Por el punto B se traza una cia tangente a AB en B y de diámetro $= \overline{AB}$.

Considerando la recta que pasa por A y el centro O de la cia.

Aplicando el teorema "Si por un punto exterior a un circulo se trazan a su cia una secante y una tangente, el segmento de tangente es media proporcional entre los segmentos de secante"

Es decir: $\overline{AB}^2 = \overline{AC} \times \overline{AD}$ ……………………o…………………………….. $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \dfrac{\overline{AD}}{\overline{AB}}$

Que aplicando las propiedades de las proporciones tendremos:

a) $\dfrac{\overline{AB} - \overline{AC}}{\overline{AC}} = \dfrac{\overline{AD} - \overline{AB}}{\overline{AB}}$

$$\frac{\overline{PB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$$
$$\overline{AC}^2 = \overline{PB} \cdot \overline{AB}$$
$$\overline{AP}^2 = \overline{PB} \cdot \overline{AB}$$

b) $\dfrac{\overline{AB} + \overline{AC}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{AD} + \overline{AB}}{\overline{AD}}$

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AD} + \overline{AB}}{\overline{AD}}$$
$$\overline{AD}^2 = (\overline{AD} + \overline{AB}) \cdot \overline{AB}$$
$$(\overline{AP'})^2 = (\overline{P'B}) \cdot \overline{AB}$$

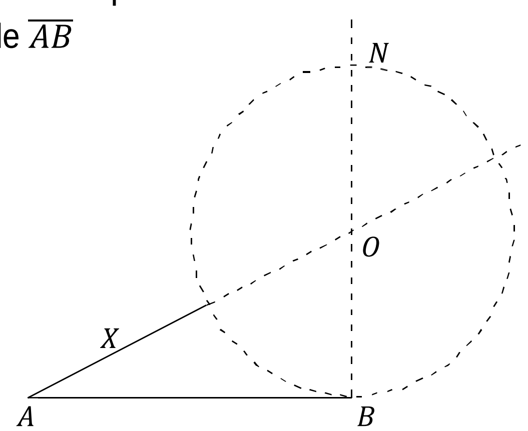
Al segmento $\overline{AP} = \overline{AC} = X$ se lo denomina segmento áureo.

CONSTRUCCION: Para construir el segmento áureo de $\overline{AB}$.

- Se construye la cia tangente a AB en B, y de diámetro igual a $\overline{AB}$ y centro O.
- Se traza la recta que pasa por A y por O y que determina con su punto de intersección más cercano a A un segmento X, que es el segmento áureo de $\overline{AB}$

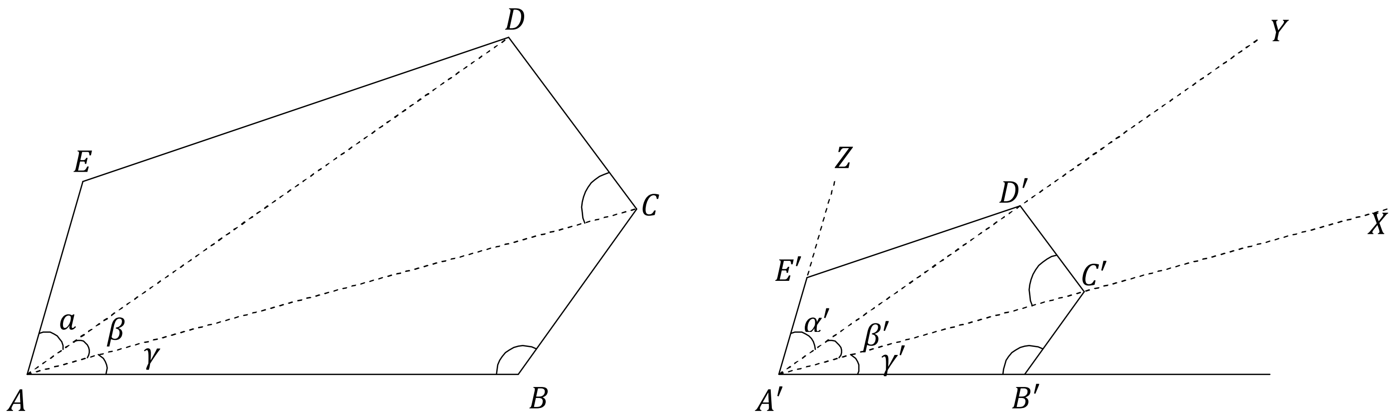
$$\overline{AB}^2 = X(X + \overline{AB}) \qquad \overline{BN} = \overline{AB}$$
$$\frac{\overline{AB}}{X} = \frac{X + \overline{AB}}{\overline{AB}}$$
$$\frac{AB - X}{X} = \frac{X}{AB}$$

Luego X es el segmento áureo de $\overline{AB}$



20-*CONSTRUIR UN POLIGONO SEMEJANTE A OTRO DADO, CONOCIENDO UN LADO HOMOLOGO A UNO DE LOS LADOS DEL POLIGONO DADO.*

Datos: $\begin{cases} \text{Polígono} \quad ABCDE \\ \text{Lado homólogo de} \quad \overline{AB} \ldots\ldots\ldots\ldots \overline{A'B'} \end{cases}$



En el polígono $ABCDE$ consideramos las diagonales AC, AD,... que determinan los ángulos γ, β, α, ...

En el extremo de $A´$ del segmento $\overline{A´B´}$ trazamos las rectas X, Y, Z que forman ángulos α', β', γ' iguales a α, β y γ

$\begin{cases} \text{Por } B´ \text{ trazamos una recta que forme un ángulo } \angle B' \text{ igual a } \angle B \\ \text{Esta recta se intersecta con } X \text{ en el punto } C´ \end{cases}$

$\begin{cases} \text{Por } C´ \text{ trazamos una recta que forme un ángulo } \angle A'C'D' = \angle ACD \\ \text{Esta recta se intersecta con Y en el punto } D´ \end{cases}$

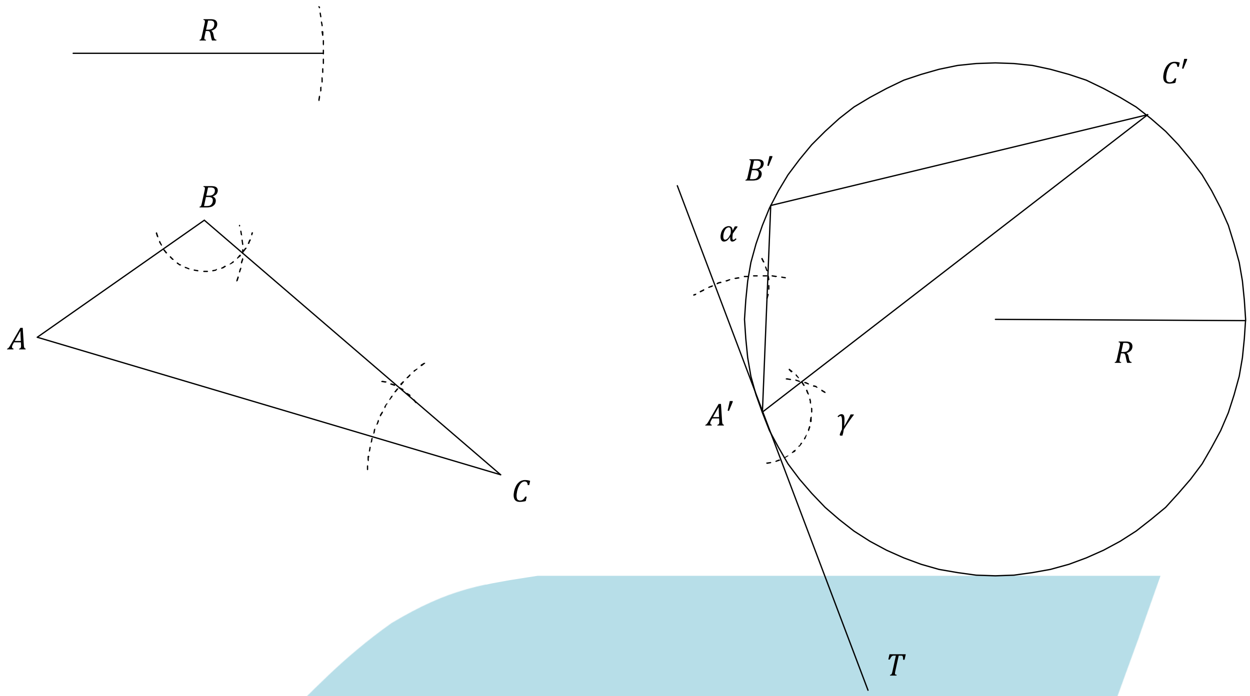
$\begin{cases} \text{Por el punto } D´ \text{ trazamos una recta que forme } \angle A'D'E' = \angle ADE \\ \text{Esta recta se intersecta con } Z \text{ en } E´ \end{cases}$

... Este proceso se repite hasta encontrar el último vértice.

$A´B´C´D´E´$..Es el polígono buscado.

21- *<u>INSCRIBIR EN UNA CIA DADA UN TRIANGULO SEMEJANTE A UN TRIANGULO DADO.</u>*

Dato:



Se traza la cia de radio R.

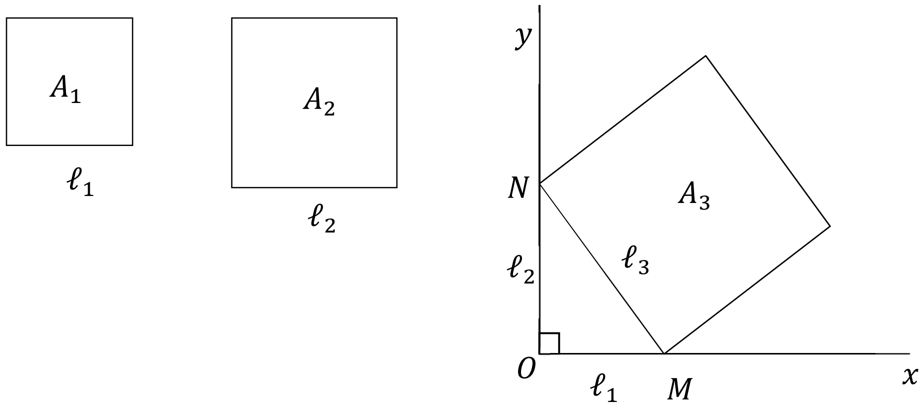
En un punto cualquiera $A´$ de la cia se traza una recta tangente $A´T$.

Con vértice en A´ se traza una recta que forme con la tangente $\angle\alpha = \angle C$ que intersecta la cia en $B´$.

A partir del mismo vértice $A´$ se traza otra recta que forme $\angle\gamma = \angle\beta$ que intersecta la cia en $C´$.

El triángulo $\overset{\Delta}{A'B'C'}$ ……………………………………………….Es el triángulo buscado.

22- *CONSTRUIR UN CUADRADO EQUIVALENTE A LA SUMA DE DOS CUADRADOS, DADOS:*



Trazar dos rectas x e y perpendiculares entre sí en O.

A partir del punto O y sobre la recta x, se determina un segmento ℓ_1 igual al lado 1º cuadrado.

A partir de O y sobre la recta y se marca un segmento igual al lado ℓ_2 del 2º cuadrado.

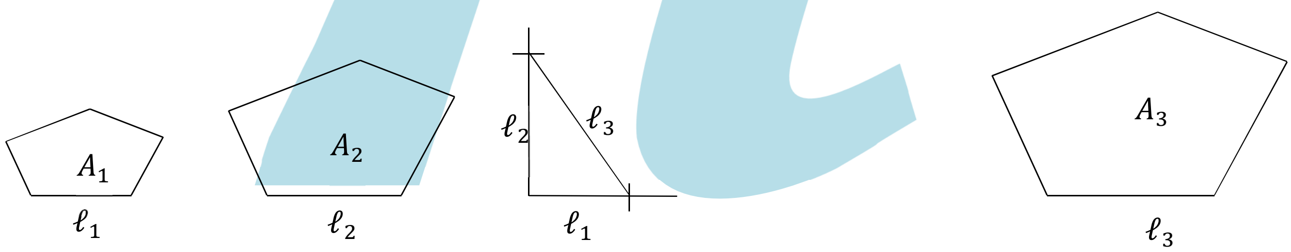
Uniendo estos puntos M y N queda formado el triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{NOM}$

Aplicando el teorema de Pitágoras tendremos:

$\ell_3^2 = \ell_1^2 + \ell_2^2$ ……………………………………………….Pero $\begin{cases} \ell_1^2 = A_1 \\ \ell_2^2 = A_2 \\ \ell_3^2 = A_3 \end{cases}$

Luego $A_3 = A_1 + A_2$ y el ℓ_3 es el lado del cuadrado pedido.

23- *CONSTRUIR UN POLÍGONO SEMEJANTE A DOS POLÍGONOS SEMEJANTES DADOS Y EQUIVALENTE A SU SUMA.*



Datos: Los polígonos semejantes cuyos lados son ℓ_1 y ℓ_2 respectivamente.

Constrúyase un triángulo rectángulo cuyos catetos son ℓ_1 y ℓ_2 respectivamente

Siendo ℓ_3 la longitud de la hipotenusa, construyese sobre ℓ_3 como homologo al polígono semejante A_3

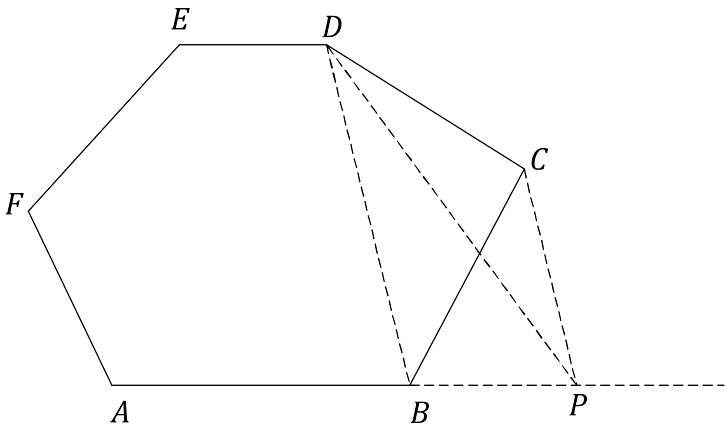
Por teorema Pitágoras………………..$\ell_1^2 + \ell_2^2 = \ell_3^2$

Las áreas son proporcionales a los cuadrados de los lados homólogos. $\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{A_1}{A_3} = \dfrac{\ell_1^2}{\ell_3^2} \\ \dfrac{A_2}{A_3} = \dfrac{\ell_2^2}{\ell_3^2} \end{array} \right\}$

Sumando miembro a miembro…………………………… $\dfrac{A_1+A_2}{A_3} = \dfrac{\ell_1^2+\ell_2^2}{\ell_3^2} = 1$

Es decir ………………..$\dfrac{A_1 + A_2}{A_3} = 1$ y luego………………………………….. $A_1 + A_2 = A_3$

24- *<u>CONSTRUIR UN TRIÁNGULO EQUIVALENTE A UN POLÍGONO DADO</u>. Sea el polígono* $ABCDEF$



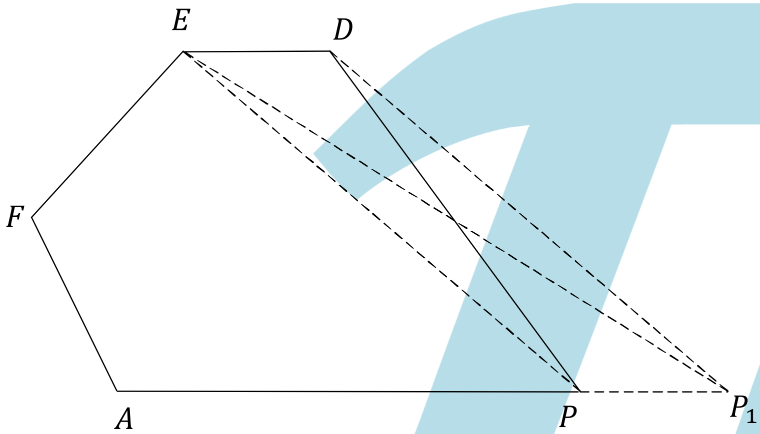
<u>1º fase:</u> Trazar la diagonal BD.

Por el vértice C se traza una // a BD hasta cortar a la prolongación de AB en el punto P.

Trazarse el segmento $\overline{DP}$.

Área $\overset{\Delta}{BCD}$ = Área $\overset{\Delta}{BPD}$ ..... Misma base y altura.

Luego Área $ABCDEF$ = Área $APDEF$



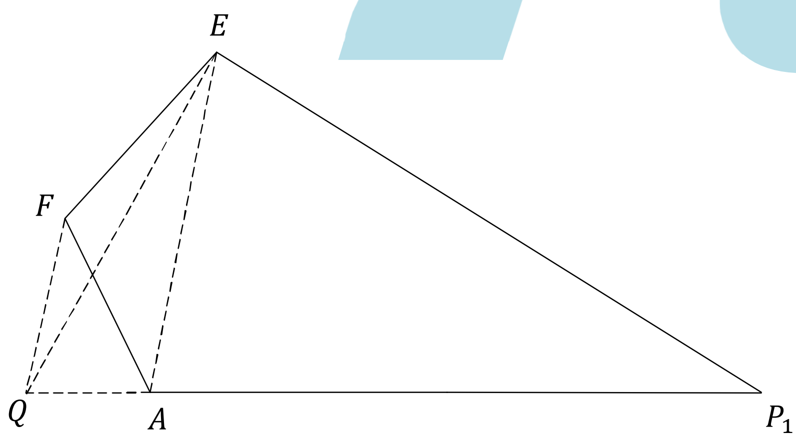
<u>2º fase:</u> Trácese la diagonal $\overline{EP}$.

Por el punto D se traza una // a $\overline{EP}$ hasta cortar la prolongación de $\overline{AP}$ en el punto P_1

Únase el punto E con P_1

Área $\overset{\Delta}{EDP}$ = Área $\overset{\Delta}{EPP_1}$...Misma base y altura.

Luego $\mathrm{A}\ APDEF = \mathrm{A}\ AP_1EF$



<u>3º fase:</u> Trácese la diagonal AE.

Por el punto F se traza una // a AE hasta intersectar a la prolongación de P_1A en Q.

Uniendo el punto Q con E.

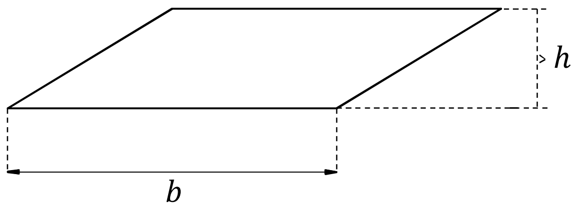
Área $\overset{\Delta}{AEF}$ = Área $\overset{\Delta}{AEQ}$.......Misma base y altura.

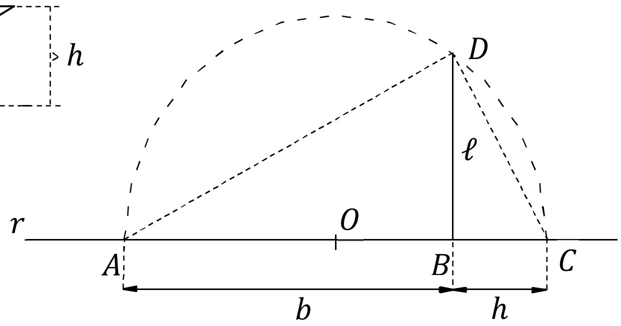
Luego Área AP_1EF = Área $\overset{\Delta}{QP_1E}$

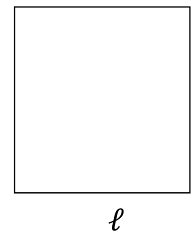
El triángulo $\overset{\Delta}{QP_1E}$ es el triángulo pedido.

<u>OBS</u>: Estas fases se pueden desarrollar en un único gráfico.

25- *CONSTRUIR UN CUADRADO EQUIVALENTE A UN PARALELOGRAMO DADO*







En una recta r a partir del punto A, determine el punto B de forma que $\overline{AB} = b$

En la misma recta r y a partir de B se determina el punto C de forma que $\overline{BC} = h$

Determine el punto medio del segmento $\overline{AC}$ y sea O dicho punto.

Haciendo centro en O y con radio igual a $\overline{OA}$ describimos el arco de semicircunferencia O.

Trace la perpendicular a r en el punto B, que intersecta a la semicircunferencia en el punto D.

El segmento $\overline{BD} = \ell$ ……………………………….es el lado del cuadrado pedido.

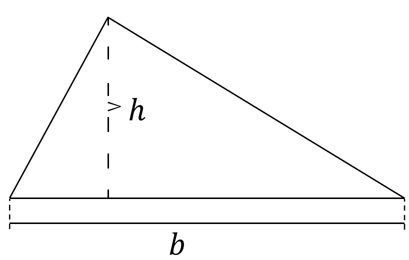
En efecto: Considerando el triángulo rectángulo en D ; $\overset{\Delta}{ADC}$

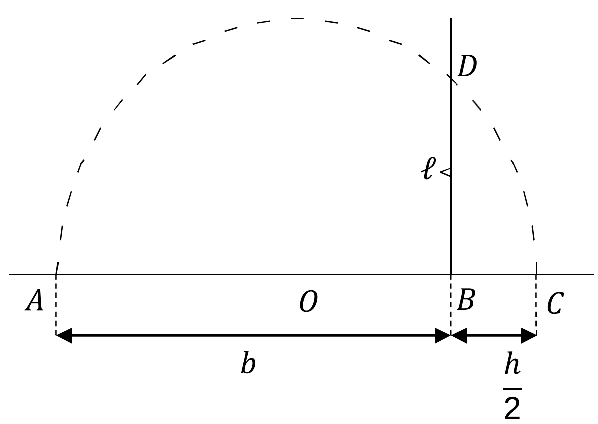
“La altura relativa a la hipotenusa es media proporcional entre los segmentos determinados en dicha hipotenusa”

Es decir: $\ell^2 = \overline{AB} \times \overline{BC} = b \times h$ por construcción.

Y siendo $\begin{cases} \ell^2 & \text{Área del cuadrado} \\ b \times h & \text{Área del paralelogramo} \end{cases}$

26- *CONSTRUIR UN CUADRADO EQUIVALENTE A UN TRIÁNGULO DADO.*





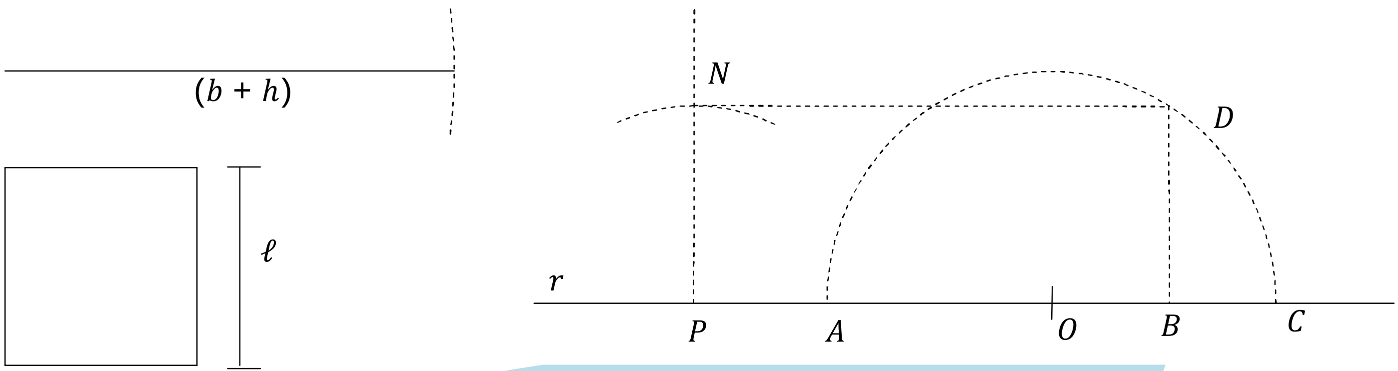
El proceso es análogo al paralelogramo con la diferencia que $\overline{BC} = \frac{h}{2}$

Por tanto………………………… ℓ ……………………………..Es el lado del cuadrado pedido.

27- *CONSTRUIR UN CUADRADO EQUIVALENTE A UN POLÍGONO DADO.*

Primeramente debemos hallar un triángulo equivalente al polígono dado y posteriormente hallar el cuadrado equivalente al triangulo.

28- *CONSTRUIR UN PARALELOGRAMO EQUIVALENTE A UN CUADRADO DADO, CONOCIENDO LA SUMA DE LA BASE Y LA ALTURA.*



En una recta r, a partir de un punto A cualquiera y con un radio igual a la longitud de $(b + h)$ marcamos el punto C de la recta r.

Sea O el punto medio del segmento $\overline{AC}$

Haciendo centro en O y con radio igual al segmento $\overline{OA} = \dfrac{\overline{AC}}{2}$ describimos una semicircunferencia de centro O.

En un punto cualquiera P de la recta r, trazamos una recta perpendicular a r.

Haciendo centro en P y con radio igual a ℓ (lado del cuadrado dado) determinamos el punto N.

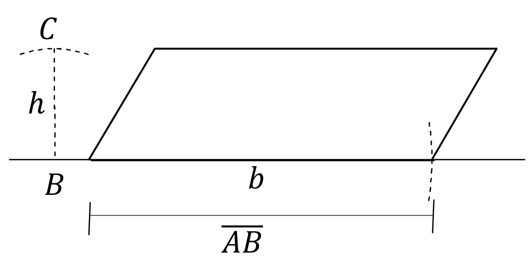
Por el punto N trazamos una recta paralela a r hasta intersectar a la semicircunferencia en el punto D

Por el punto D trazamos una perpendicular a r determinando el punto B

AB $= b$ … … … … … … … … … … … … … … … . … . . base del paralelogramo

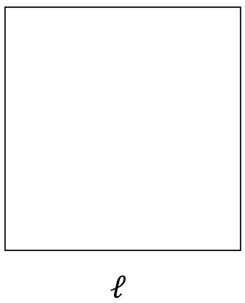
$BC = h$ … … … … … … … … . . … … … … … . … . . altura del paralelogramo

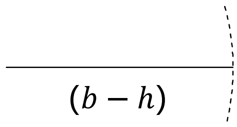
Luego el paralelogramo será:

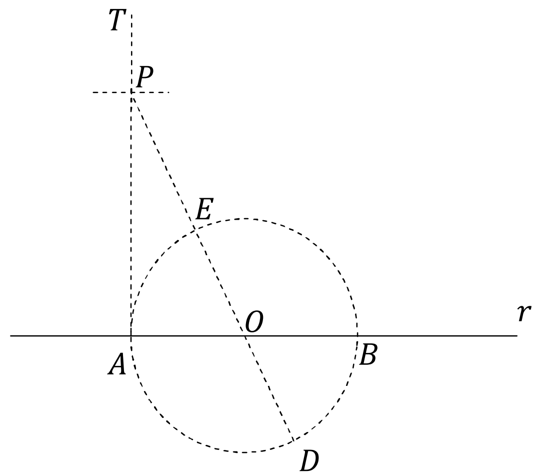


OBS: Problema inverso al 26

29- *CONSTRUIR UN PARALELOGRAMO EQUIVALENTE A UN CUADRADO DADO, CONOCIENDO LA DIFERENCIA ENTRE LA BASE Y LA ALTURA.*







Consideremos una recta cualquiera r.

A partir de un punto cualquiera de r, el punto A, determinamos sobre r un punto B, de tal forma que $\overline{AB} = b - h$ ....dato del problema.

Sea O el punto medio del segmento $\overline{AB}$.

Haciendo centro en O y con radio igual a $\overline{OA} = \frac{AB}{2}$ describimos la cia O.

Trazar una perpendicular a r en el punto A.

Haciendo centro en A y con radio igual a la longitud ℓ (lado del cuadrado) determinamos sobre la perpendicular el punto P.

$$\overline{AP} = \ell$$

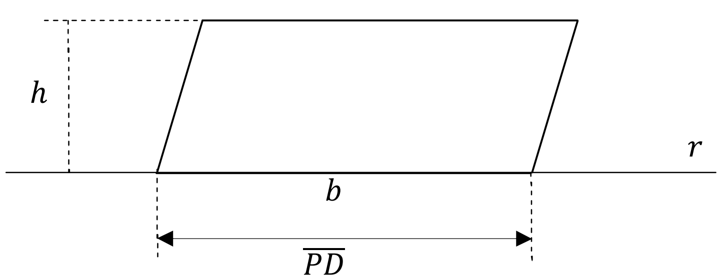
Trazamos la secante que pasa por P y O.

Esta secante corta a la cia en los puntos E y D, y los segmentos $\overline{PD}$ y $\overline{PE}$ son la base y la altura respectiva del paralelogramo $\begin{cases} \overline{PD} = b \\ \overline{PE} = h \end{cases}$

En efecto: “Si desde un punto exterior se traza a una cia una tangente y una secante se verifica que el segmento de la tangente es media proporcional entre los segmentos de la secante determinados entre el punto y la cia”

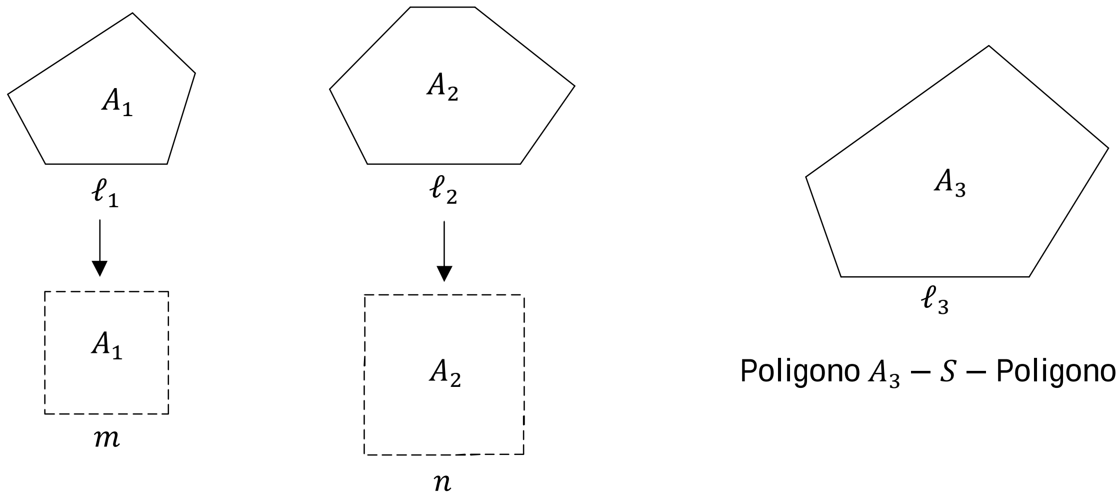
Es decir: $\begin{cases} \overline{PA}^2 = \overline{PD} \times \overline{PE} \\ \ell^2 \ = b \times h \end{cases}$

Luego el paralelogramo será:



30- *CONSTRUIR UN POLÍGONO SEMEJANTE A UN POLÍGONO DADO Y EQUIVALENTE A OTRO POLÍGONO DADO.* Datos: A_1 ; A_2

1º FASE:



Poligono $A_3 - S -$ Poligono A_1

Se construyen cuadrados equivalentes a los polígonos A_1 y A_2 dados.

Sean m y n respectivamente los lados de estos cuadrados.

2º FASE: Siendo ℓ_1 un lado cualquiera del polígono A_1.

Determínese la cuarta proporcional entre m, n, ℓ_1

Sea ℓ_3 la cuarta proporcional de m, n, ℓ_1

Con ℓ_3 cómo lado homólogo de ℓ_1 , constrúyase un polígono A_3 semejante al polígono A_1.

A_3 Es el polígono buscado.

Demostración: $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{n}} = \frac{\ell_1}{\ell_3}$................Por construcción l_3 es la 4º proporcional de m, n y ℓ_1.

$\left\{\begin{array}{l}\text{Elevado al cuadrado}\\ \text{ambos miembros}\end{array}\right.$ $\frac{m^2}{n^2} = \frac{\ell_1^2}{\ell_3^2}$ ... ... Pero $\left\{\begin{array}{l} A_1 = m^2 \\ A_2 = n^2 \end{array}\right.$

Luego.. $\frac{\mathrm{A}_1}{\mathrm{A}_2} = \frac{\ell_1^2}{\ell_3^2}$ ... ... (1)

Puesto que los polígonos A_1 y A_3 son semejantes tendremos:

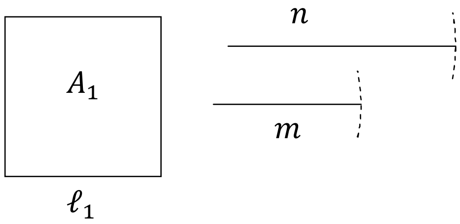
$$\frac{\mathrm{A}_1}{\mathrm{A}_3} = \frac{\ell_1^2}{\ell_3^2} \text{ ... ... (2)}$$

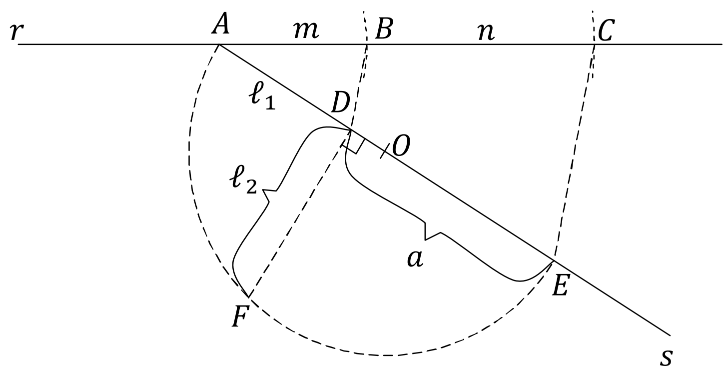
Igualando los 1ºs miembros de (1) y (2) $\frac{\mathrm{A}_1}{\mathrm{A}_2} = \frac{\mathrm{A}_1}{\mathrm{A}_3}$

"En toda proporción si los antecedentes son iguales los consecuentes también serán"

Luego:... $A_2 = A_3$

31- ***CONSTRUIR UN CUADRADO CUYA ÁREA ESTE EN UNA RELACIÓN IGUAL A LA DE DOS SEGMENTOS m Y n CON EL ÁREA DE UN CUADRADO DADO.***





Primeramente determinamos la cuarta proporcional de m, n y ℓ_1

En la recta r determinamos

$$\begin{cases} \overline{AB} = m \\ \overline{BC} = n \end{cases}$$

Siendo s una recta cualquiera que pasa por A, determinamos $\overline{AD} = \ell_1$

Unimos B con D y por el punto C trazamos una paralela a BD, de esta forma determinamos el punto E y la cuarta proporcional a.

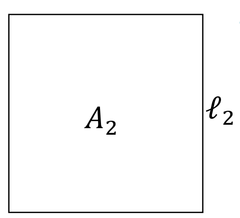
Determinamos el punto medio O del segmento $\overline{AE}$

Haciendo centro en O y con radio igual a $\overline{OA} = \frac{1}{2}\overline{AE}$ describimos la semicircunferencia O.

En el punto D trazamos una perpendicular a s. Esta perpendicular corta a la semicircunferencia en F, determinando el segmento ℓ_2

ℓ_2 Es el lado del cuadrado buscado.

<u>Demostración:</u>



$\frac{\ell_1}{a} = \frac{m}{n}$.....................................(1) ....Por construcción

$\ell_1^2 = \ell_1^2$..Por identidad

$\ell_1 a = \ell_2^2$..Por construcción

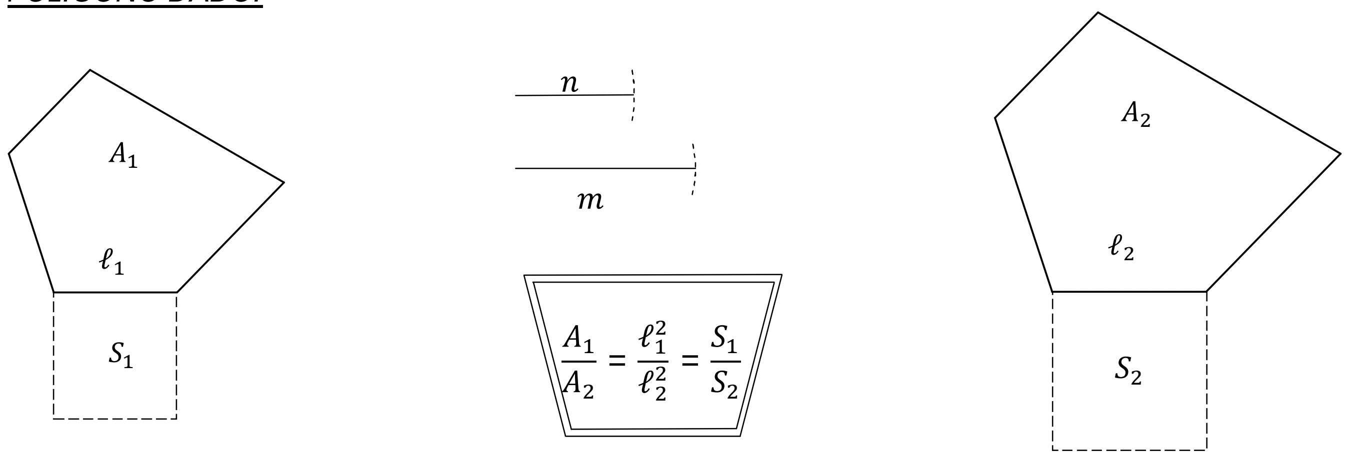
Dividiendo m. a m. $\frac{\ell_1}{a} = \frac{\ell_1^2}{\ell_2^2}$...(2)

De (1) y (2) tenemos $\frac{m}{n} = \frac{\ell_1^2}{\ell_2^2}$

Pero .... $\frac{\ell_1^2}{\ell_2^2} = \frac{A_1}{A_2}$

Luego:.................................... $\frac{A_1}{A_2} = \frac{m}{n}$...........................Por transitividad de las igualdades.

32- ***CONSTRUIR UN POLÍGONO SEMEJANTE A UN POLÍGONO DADO Y CUYA ÁREA ESTE EN UNA RELACIÓN IGUAL A LA DE DOS SEGMENTOS m Y n CON EL ÁREA DEL POLÍGONO DADO.***

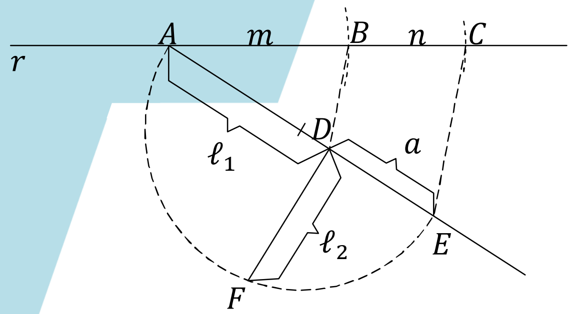


Debido a que dos polígonos semejantes tienen sus áreas proporcionales a los cuadrados de dos lados homólogos cualesquiera.

Pero el cuadrado de los lados da el área de un cuadrado construido sobre ese lado.

Luego debemos determinar el lado ℓ_2 de un cuadrado cuya área S_2 este con S_1 en la relación

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{m}{n}$$



Determinamos la cuarta proporcional entre m, n y ℓ_1

Teniendo por diámetro el segmento $\overline{AE}$ trazamos la semicircunferencia, y con una perpendicular en D determinamos el segmento ℓ_2

ℓ_2 Es el lado homólogo del polígono buscado.

Teniendo por lado homologo a ℓ_2 construimos el polígono A_2 semejante al polígono A_1

Demostración:

$\frac{A_1}{A_2} = \frac{\ell_1^2}{\ell_2^2}$ … … … … … … … (1) … … . … … … … … $\left\{ \begin{array}{l} \text{Las áreas de dos polígonos semejantes son entre sí,} \\ \text{como los cuadrados de lados homólogos.} \end{array} \right.$

También…………………… $\left\{ \begin{array}{l} \frac{S_1}{S_2} = \frac{\ell_1^2}{\ell_2^2} \text{ … … … … … . (2) … … . … … . . Por construcción.} \\ \frac{\ell_1}{a} = \frac{m}{n} \text{ … … … … … … … (3) … … . … … … Por construcción.} \end{array} \right.$

$\ell_1^2 = \ell_1^2$ …………………………………………Por identidad.

$\ell_1 a = \ell_2^2$ ……………………………………………Por construcción.

$\frac{\ell_1}{a} = \frac{\ell_1^2}{\ell_2^2}$ …………………………………(4)

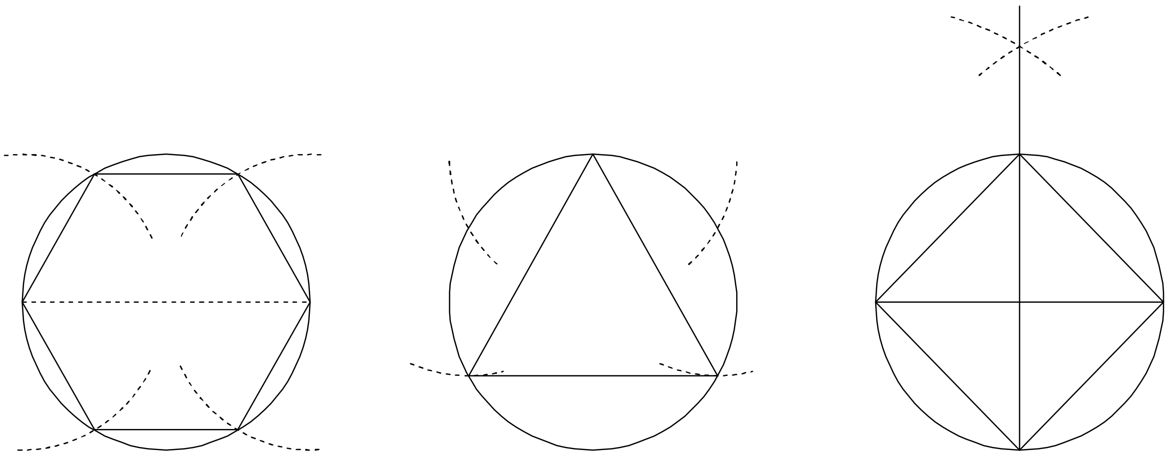
Por tanto………………… $\frac{A_1}{A_2} = \frac{S_1}{S_2} = \frac{\ell_1^2}{\ell_2^2} = \frac{\ell_1}{a} = \frac{m}{n}$

O mejor ………………………………. $\frac{A_1}{A_2} = \frac{m}{n}$

OBS: El proceso expuesto aquí puede utilizarse para construir cualquier polígono semejante a otro, cuyas áreas estén en una determinada relación.

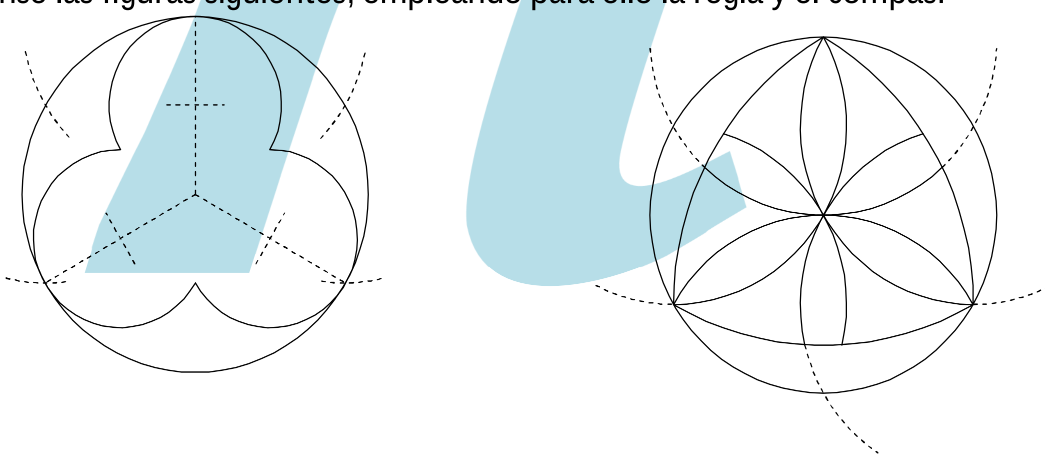
Ejemplo: doble, triple… etc.

1) Dibújense las figuras siguientes, empleando para ello la regla y el compás:

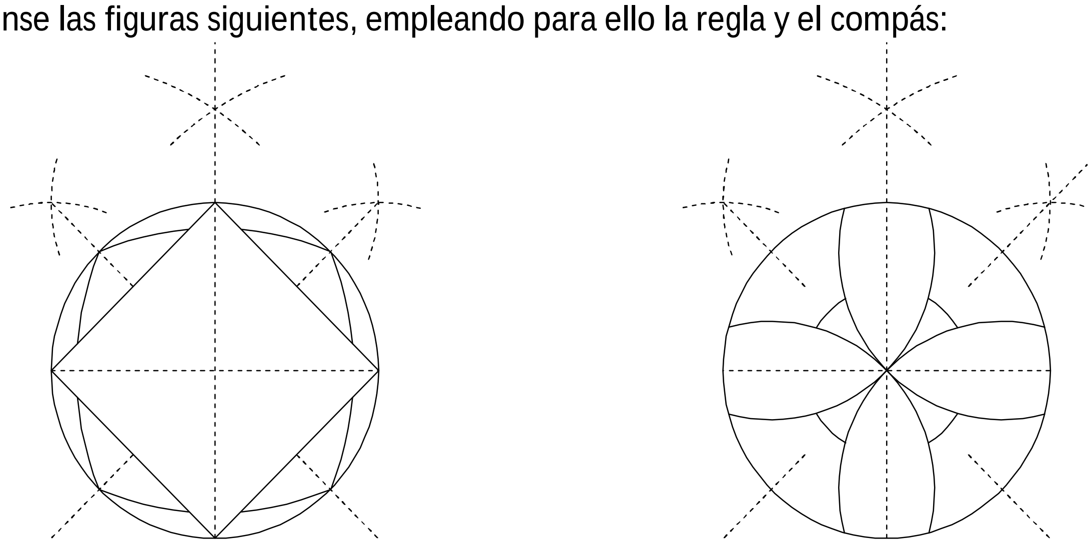


2) Dibújense las figuras siguientes, empleando para ello la regla y el compás:

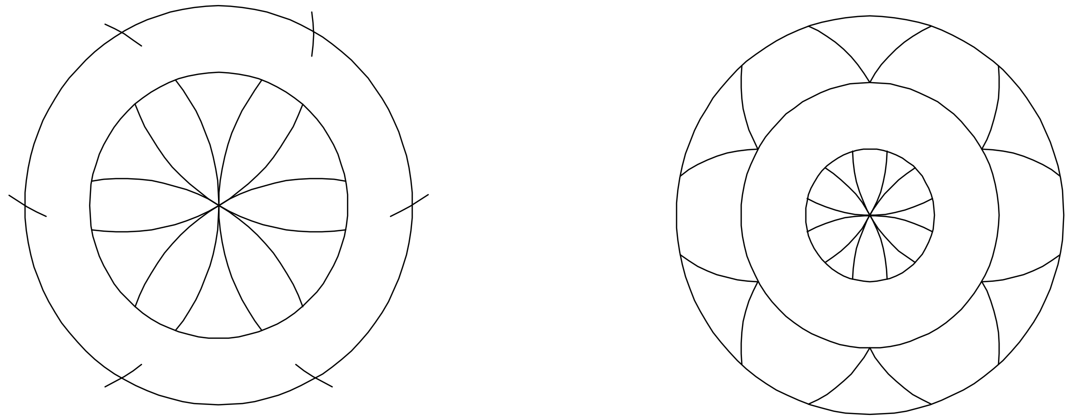
3) Dibújense las figuras siguientes, empleando para ello la regla y el compás:



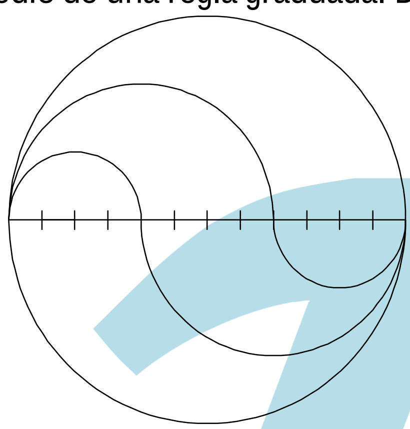
4) Dibújense las figuras siguientes, empleando para ello la regla y el compás:



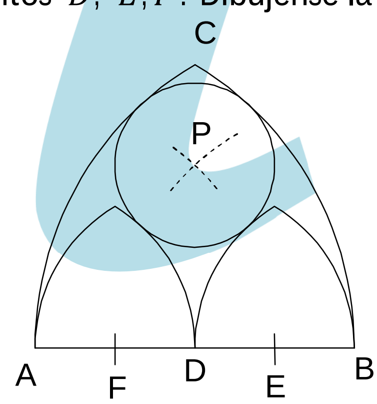
5) Dibújense las figuras siguientes, empleando para ello la regla y el compás:



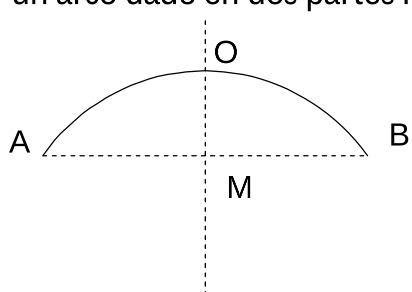
6) Trácese una recta de 36 mm de longitud, y divídase en doce partes iguales (3 mm cada una) por medio de una regla graduada. Dibújese luego la figura que aquí se representa.



7) El dibujo adjunto se emplea en la construcción de ventanas góticas. El arco BC se describe de A como centro, con radio AB. Los centros de los arcos menores son A, D, B, y el radio de los cuatro es AD. El centro P se determina describiendo arcos con A y B por centros y AE por radio. ¿Cómo pueden hallarse los puntos D, E, F? Dibújense la figura.



8) Dividir un arco dado en dos partes iguales.



9) Construir ángulos de 45° y 135°.

10) Construir ángulos de 22°30’ y 150°30’.

11) Dado el lado de un triángulo equilátero, construir el triángulo, y por tanto también un ángulo de 60°.

12) Construir un ángulo de 30°, o sea, trisectar un recto.

13) Construir ángulos de 15°, 7°30', 195°, 345°.

14) Construir un triángulo en que dos ángulos sean de 75° ¿Hay sólo un triángulo que llene esta condición?

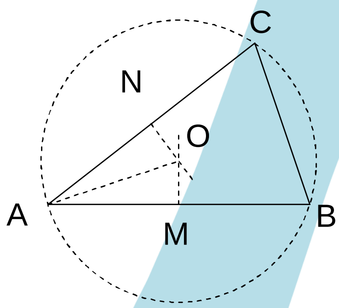
15) Dividir una recta dada en cuatro partes iguales.

16) Dado el perímetro de un triángulo equilátero, construir el triángulo.

17) Por un punto dado trazar dos rectas que formen dos triángulos isósceles con dos rectas concurrentes dadas.

18) Construir un paralelogramo conociendo un ángulo y los lados que lo forman.

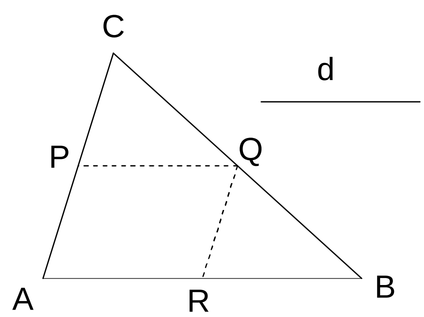
19) Circunscribir un círculo a un triángulo dado.



20) Trazar un círculo por tres puntos no situados en línea recta.

21) Inscribir un círculo en un triángulo dado.

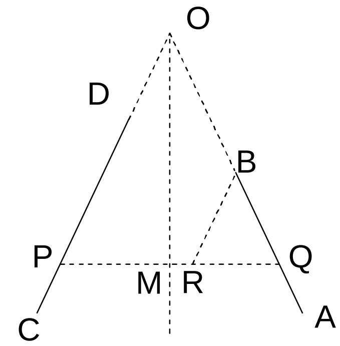
22) Trazar una recta de longitud dada que esté limitada por dos lados de un triángulo y sea además paralela al tercero.



23) Trazar una tangente a un círculo dado que sea paralela a una recta dada.

24) Construir un cuadrado, dada la diagonal.

25) Trazar la bisectriz de un ángulo cuyo vértice es inaccesible.



26) Hallar un punto que se halle a 12 mm del vértice de un ángulo y equidiste de los lados del ángulo.

27) Hallar un punto que equidiste de dos rectas que se cortan y diste 8 mm del punto de intersección.

28) Hallar un punto que diste 16 mm de un punto dado y equidiste de dos rectas dadas que se cortan. Discútase el problema.

29) Por dos puntos dados trazar una circunferencia de radio dado.

30) Determinar un punto, conocida su distancia a dos puntos dados.

31) Trazar un círculo que pase por dos puntos dados y tenga el centro en una recta dada.

32) Hallar un punto equidistante de dos puntos dados y también de dos rectas concurrentes dadas.

33) Hallar un punto equidistante de dos puntos dados y también de dos paralelas dadas.

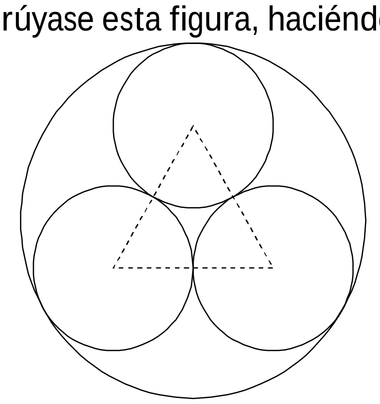
34) Construir un triángulo rectángulo, dados: La hipotenusa y un cateto.

35) Construir un triángulo rectángulo, dados: un cateto y la perpendicular del vértice del ángulo recto la hipotenusa.

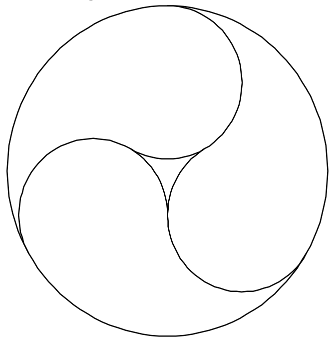
36) Construir un triángulo, dados: la base, la altura y un ángulo adyacente a la base.

37) Construir un rectángulo, dados un lado y el ángulo de las diagonales.

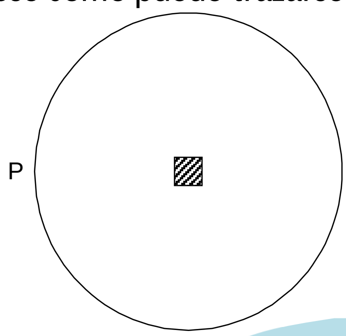
38) Constrúyase esta figura, haciéndola de doble tamaño.



39) Constrúyase esta figura, haciéndola de doble tamaño.



40) Explíquese cómo puede trazarse en P una tangente a este círculo, cuyo centro es inaccesible.



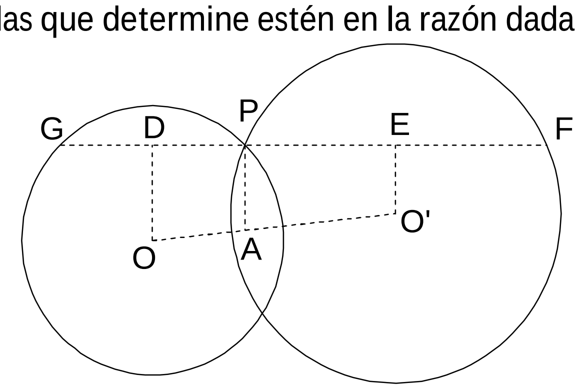
41) Sean a y b dos rectas dadas. Constrúyase una recta que representa $\sqrt{ab}$. Aplíquese la construcción al caso en que las longitudes de a y b son 2 y 3 respectivamente.

42) Sean m y n dos rectas dadas. Constrúyase otra que sea igual a $\sqrt{2mn}$.

43) Hállese por construcción y calcúlese por aritmética la tercera proporcional de dos rectas de 3 y 4 cm.

44) Hállese $\sqrt{5}$ por construcción. Mídase la recta así obtenida, y véase si el resultado es aproximadamente el que da el cálculo.

45) Trazar por uno de los puntos de intersección de dos circunferencias una recta tal que las dos cuerdas que determine estén en la razón dada $m{:}\,n$.



46) Si sobre los lados de un triángulo rectángulo se construyen triángulos equiláteros, el construido sobre la hipotenusa es equivalente a la suma de los otros dos.

47) Si sobre los lados de un triángulo rectángulo como lados homólogos se construyen polígonos semejantes, el construido sobre la hipotenusa es equivalente a la suma de los otros dos.

48) Si de un punto interior a un paralelogramo se trazan rectas a los vértices, la suma de los dos triángulos cuyas bases son dos de los lados paralelos es equivalente a la suma de los otros dos.

49) Toda recta trazada por el punto de intersección de las diagonales de un paralelogramo bisecta el área del paralelogramo.

50) Si un cuadrilátero que tiene dos lados paralelos es dividido en partes equivalentes por una diagonal, el cuadrilátero es un paralelogramo.

51) El triángulo determinado por rectas que van del punto medio de uno de los lados no paralelos de un trapecio a los vértices opuestos es equivalente a la mitad del trapecio.

52) ¿Cómo se determina el área de un polígono cualquiera? ¿Qué datos son necesario?

53) Explique cómo se procese a calcular el área de un triángulo rectángulo isósceles cuya hipotenusa se conoce.

54) Dados los tres lados de un triángulo, ¿Cómo se puede saber si el triángulo es rectángulo?

55) Hállense la relación de los perímetros y la de las áreas de dos octógonos regulares cuyos lados están en la relación de 2 a 6.

56) El área de un triángulo equiángulo es 9 veces la de otro triángulo equilátero. ¿En qué relación están las alturas?

57) Dados un círculo, ¿Cuántos círculos del mismo radio pueden trazarse que sean tangentes exteriormente al círculo dado y entre sí?

58) Las rectas que unen los puntos medios de los lados opuestos de un cuadrilátero se bisectan mutuamente.

59) Dividir un triángulo dado en dos partes equivalentes por una recta trazada por uno de los vértices.

60) Trazar a un círculo dado una tangente perpendicular a una recta dada.